ГЛАВА ВТОРАЯ

ОПРЕДЕЛЕННОЕ КОЛИЧЕСТВО

Определенное количество, квант — *прежде всего* количество с некоторой определенностью или границей вообще — есть в своей совершенной определенности *число*. Определенное количество делится,

во-вторых, прежде всего на *экстенсивное* определенное количество, в котором граница дана как ограничение налично сущего *множества,* а затем, когда это наличное бытие переходит в для-себя-бытие, на *интенсивное* определенное количество, *градус* [76], которое, как «для-себя» и в последнем как *безразличная граница,* столь же непосредственно *вовне себя* имеет свою определенность в некотором ином. Как это положенное противоречие, — быть таким образом определенным просто внутри себя и вместе с тем иметь свою определенность вовне себя и указывать на нее вовне себя, — определенное количество,

в-третьих, как в самом себе внешне положенное переходит в *количественную бесконечность.*

А. ЧИСЛО

Количество есть определенное количество или, иначе говоря, имеет границу и как непрерывная и как дискретная величина. Различие этих видов не имеет здесь сначала никакого значения.

Количество как снятое для-себя-бытие уже само по себе безразлично к своей границе. Но тем самым ему также не безразлично быть границей, или определенным количеством; ибо оно содержит внутри себя «одно», абсолютную определенность, как свой собственный момент, который, следовательно, как положенный в его непрерывности или единице, есть его граница, остающаяся, однако, «одним», которым она вообще стала.

Это «одно» есть, стало быть, принцип определенного количества, но «одно» *как количественное* «одно». Благодаря этому оно, *во-первых,* непрерывно, *единица; во-вторых,* оно дискретно, оно в-себе-сущее (как в непрерывной величине) или положенное (как в дискретной величине) множество «одних», которые равны между собой, обладают указанной выше непрерывностью, имеют одну и ту же единицу. *В-третьих,* это «одно» есть также отрицание многих «одних» как простая граница, есть исключение из себя своего инобытия, определение себя по отношению к *другим* определенным количествам. Постольку «одно» есть граница, α) *соотносящаяся с собой,* β) *охватывающая* и γ) *исключающая иное.*

Определенное количество, полностью положенное в этих определениях, есть *число.* Полная положенность заключается в наличном бытии границы как *множества* и, стало быть, в ее отличии от единицы. Число выступает поэтому как дискретная величина, но в единице оно обладает и непрерывностью. Оно есть поэтому и определенное количество в совершенной *определенности,* так как в числе граница дана как определенное *множество,* имеющее своим принципом «одно», то, что́ безусловно определенно. Непрерывность, в которой «одно» есть лишь *в себе,* как снятое (положенное как единица), есть форма неопределенности.

Определенное количество, лишь как таковое, ограничено вообще; его граница есть его абстрактная, простая определенность. Но так как оно число, эта граница положена как *многообразная внутри себя самой.* Число содержит те многие «одни», которые составляют его наличное бытие, но содержит их не неопределенным образом, а определенность границы относится именно к нему; граница исключает другое наличное бытие, т. е. другие «многие», и охватываемые ею «одни» суть определенное множество, *численность,* для которой как дискретности, какова она в числе, другим служит *единица,* ее непрерывность. *Численность и единица* составляют *моменты* числа.

Что касается численности, то следует еще рассмотреть подробнее, каким образом многие «одни», из которых она *состоит,* заключены в границе. О численности правильно говорится, что она *состоит* из «многих», ибо «одни» находятся в ней не как снятые, а *суть* в ней, только положенные вместе с исключающей границей, к которой они безразличны. Но граница не безразлична к ним. При [рассмотрении нами] наличного бытия отношение к нему границы оказалось прежде всего таким, что наличное бытие как утвердительное оставалось по сю сторону своей границы, а граница, отрицание, находилась вне его, у его края; точно так же во многих «одних» прерыв их и исключение других «одних» выступает как определение, которое имеет место вне охватываемых «одних». Но там оказалось, что граница пронизывает наличное бытие, простирается столь же далеко, как оно, и что вследствие этого нечто ограничено по своему определению, т. е. конечно. — В числе как количестве представляют себе, например, сто так, что только сотое «одно» ограничивает «многие» таким образом, что они составляют сто. С одной стороны, это правильно; с другой же, из ста «одних» никакое не обладает преимуществом, так как они только одинаковы; каждое из них есть в такой же мере сотое, как и другие; все они, следовательно, принадлежат к той границе, благодаря которой данное число есть сто; для своей определенности это число не может обойтись ни без одного из них; прочие «одни», следовательно, не составляют в сравнении с сотым «одним» такого наличного бытия, которое находилось бы вне границы или лишь внутри ее, вообще было бы отлично от нее. Численность не есть поэтому некоторое множество в *противоположность* охватывающему, ограничивающему «одному», а сама составляет это ограничение, которое есть некое определенное количество; «многие» составляют одно число, *одну* двойку, *один* десяток, *одну* сотню и т. д.

Итак, ограничивающее «одно» есть определенность в отношении другого, отличение данного числа от других. Но это отличение не становится качественной определенностью, а остается количественным, относится лишь к сравнивающей *внешней* рефлексии. Число как «одно» остается возвращенным к себе и безразличным к другим. Это *безразличие* числа к другим есть его сущностное определение; оно составляет *его в-себе-определенность*, но в то же время и *его собственную внешность*. — Число есть, таким образом, *нумерическое* «одно» как абсолютно определенное «одно», которое имеет в то же время форму простой непосредственности и для которого поэтому соотношение с другим совершенно внешнее. Как такое «одно», которое есть *число*, оно, далее, имеет *определенность* (поскольку она есть *соотношение с другим*) как свои моменты внутри самого себя, в своем *различии между единицей и численностью*, и численность сама есть множество *«одних»*, т. е. в нем самом имеется этот абсолютно внешний характер. — Это противоречие числа или определенного количества вообще внутри себя составляет качество определенного количества, — качество, в дальнейших определениях которого это противоречие получает свое развитие.

Примечание 1

[Арифметические действия. Кантовские априорные синтетические суждения созерцания]

Пространственная и числовая величины обычно рассматриваются как два вида величин таким образом, что пространственная величина сама по себе есть столь же определенная величина, как и числовая величина. Их различие, как полагают, состоит лишь в различных определениях непрерывности и дискретности, как определенное же количество они стоят на одной ступени. Геометрия, вообще говоря, имеет своим предметом в виде пространственной величины непрерывную величину, а арифметика в виде числовой величины — дискретную. Но вместе с этой неодинаковостью предмета они не имеют и одинакового способа и совершенства ограничения или определенности. Пространственная величина имеет лишь ограничение вообще; поскольку она должна рассматриваться как безусловно определенный квант, она нуждается в числе. Геометрия, как таковая, не *измеряет* пространственных фигур, не есть искусство измерения, она лишь *сравнивает* их. В даваемых ею дефинициях определения также отчасти заимствуются ею из *равенства* сторон, углов, из *равного* расстояния. Так, например, круг, основывающийся единственно лишь на *равенстве* расстояния всех возможных в нем точек от одного центра, не нуждается для своего определения ни в каком числе. Эти определения, основывающиеся на равенстве или неравенстве, суть подлинно геометрические. Но их недостаточно, и для определения других фигур, например треугольника, четырехугольника, требуется число, заключающее в своем принципе, в «одном», определенность самостоятельную (das für sich Bestimmtsein), а не с помощью чего-то другого, стало быть, не через сравнение. В точке, правда, пространственная величина имеет определенность, соответствующую «одному»; однако точка, поскольку она выходит вовне себя, становится иным, становится линией; так как она по своему существу есть лишь «одно» *пространства*, то она в *соотношении* становится такой непрерывностью, в которой снята точечность, самостоятельная определенность, «одно». Поскольку самостоятельная определенность должна сохраниться в вовне-себя-бытии, приходится представлять линию как некоторое множество «одних», и она должна получить внутри себя *границу*, определение *многих* «одних», т. е. величину линии — и точно так же других пространственных определений — следует брать как число.

Арифметика рассматривает число и его фигуры, или, вернее, не рассматривает их, а оперирует ими. Ибо число есть безразличная, инертная определенность; оно должно быть приведено в действие и в соотношение *извне*. Способы такого соотнесения — это [четыре] *арифметических действия*. Они излагаются в арифметике одно после другого, и ясно, что одно *действие* зависит от другого. Однако в арифметике не выделяется нить, руководящая их последовательностью. Но из самого определения понятия числа легко получается систематический порядок, на который справедливо притязает изложение этих элементов в учебниках. На эти руководящие определения следует здесь обратить некоторое внимание.

В силу своего принципа, «одного», число есть вообще нечто внешне сочетанное, всецело аналитическая фигура, в которой нет никакой внутренней связи. Таким образом, поскольку оно лишь нечто порожденное извне, всякое исчисление есть продуцирование чисел, *счет* или, *говоря более определенно, сосчитывание*. Разница в этом внешнем продуцировании, совершающем постоянно лишь одно и то же, может заключаться только в различии по отношению друг к другу сосчитываемых чисел; такое различие само должно быть заимствовано откуда-то извне и из внешнего определения.

Качественное различие, составляющее определенность числа, — это то, с которым мы познакомились, — различие между *единицей* и *численностью;* к этому различию сводится поэтому всякая определенность понятия, могущая иметь место в арифметических действиях. Различие же, присущее числам как определенным количествам, есть внешнее тождество и внешнее различие, *равенство* и *неравенство,* которые суть рефлективные моменты и которые следует рассматривать среди определений сущности там, где трактуется о различии.

Далее, нужно предварительно отметить, что числа могут в общем быть произведены двояко — либо сочетанием, либо разъединением уже сочетанных; поскольку этот двоякий способ имеет место при одинаково определенном виде счета, то сочетанию чисел (это можно назвать *положи-*

тельным арифметическим действием) соответствует разъединение их (это можно назвать *отрицательным* арифметическим действием), причем само определение действия независимо от этой противоположности.

После этих замечаний укажем виды исчисления. 1. *Первое* порождение числа — это сочетание «многих», как таковых, т. е. «многих», каждое из которых положено лишь как *«одно», — нумерование*. Так как «одни» внешни друг другу, то они представляются в чувственном образе, и действие, посредством которого порождается число, есть счет по пальцам, по точкам и т. п. Что такое четыре, пять и т. д., это может быть лишь *показано*. Остановка в счете, будет ли сочетано то или иное количество [«одних»], есть нечто случайное, произвольное, так как граница внешняя. — Различие между численностью и единицей, возникающее в дальнейшем развитии арифметических действий, служит основой *системы* чисел — двоичной, десятеричной и т. д.; такая система покоится в общем на произвольном выборе той численности, которая постоянно должна снова и снова быть взята как единица.

Возникшие посредством нумерования *числа* снова подвергаются нумерованию; поскольку они положены столь непосредственно, они еще определены без всякого соотношения друг с другом, безразличны к равенству и неравенству, их величины по отношению друг к другу случайны; они поэтому вообще *неравны;* это — *сложение*. — Что 7 и 5 составляют 12, это узнают тем, что к 7 прибавляют на пальцах или как-нибудь иначе еще 5 «одних»; результат этого действия сохраняют затем в памяти, помнят *наизусть* (auswendig) [77], ибо при этом нет ничего внутреннего (Innerliches). И точно так же узнают посредством счета на пальцах и т. д., что $7 \times 5 = 35$, что к одной семерке прибавляется еще одна семерка, повторяют это пять раз, и результат также запоминается наизусть. От этого труда — считать, находить суммы, умножать — навсегда избавила готовая таблица сложения или умножения, которую нужно лишь заучить наизусть.

Кант рассматривает (во Введении к «Критике чистого разума», раздел V) положение $7+5=12$ как синтетическое положение. «На первый взгляд, — говорит он, — может показаться (конечно!), что это положение $7+5=12$ чисто аналитическое, вытекающее по закону противоречия из *понятия суммы* семи и пяти» [78]. Понятие суммы не означает ничего, кроме абстрактного определения, что эти два числа *должны* быть сочетаны и притом как числа внешним, т. е. чуждым понятия образом, что начиная с 7 следует продолжать считать до тех пор, пока не будут исчерпаны долженствующие быть прибавленными «одни», численность которых определена числом 5; полученный результат носит уже заранее известное название двенадцати. «Однако, — продолжает Кант, — присматриваясь ближе, мы находим, что понятие суммы 7 и 5 содержит в себе только *соединение* этих двух чисел в одно и от этого вовсе не *мыслится, каково* то число, которое охватывает оба слагаемых». «Сколько бы я ни расчленял свое понятие такой возможной суммы, я не найду в нем числа 12» [79]. При переходе от указанной задачи к результату сумма действительно не *мыслится,* понятие не расчленяется. «Необходимо выйти за пределы этих *понятий,* прибегая к помощи созерцания, пяти пальцев и т. д. и таким образом присоединять единицы числа пять, *данного* в *созерцании,* к *понятию* семи» [80], — прибавляет он. Пять действительно дано в созерцании, т. е. оно совершенно *внешняя* сочетанность произвольно повторявшейся мысли, «одного»; но 7 точно так же не понятие; здесь нет понятий, за пределы которых нужно было бы выходить. Сумма 7 и 5 означает чуждое понятия соединение этих двух чисел; такое столь чуждое понятия нумерование, продолжающееся от 7 до тех пор, пока не будут исчерпаны пять единиц, можно назвать сочетанием, синтезированием с таким же правом, как и нумерование, начинающее с «одного»,— синтезированием, которое, однако, носит совершенно аналитический характер, так как связь здесь всецело искусственная, в ней нет и в нее не входит ничего такого, что не было бы совершенно внешним. Требование сложить 7 и 5 относится к требованию вообще нумеровать, как требование продолжить прямую линию к требованию провести прямую линию.

Столь же бессодержательно, как выражение «синтезирование», и определение, что это синтезирование совершается a priori. Правда, счет не есть определение ощущений, единственно которое, согласно кантовскому определению созерцания, и остается на долю a posteriori, и счет действительно есть занятие на почве абстрактного созерцания, т. е. такого, которое определено категорией «одного» и при котором абстрагируются как от всех остальных определений ощущений, так и от понятий. «A priori» — это вообще нечто лишь смутное. Определение эмоций — влечение, склонность и т. д. — в такой же мере имеет в себе момент априорности, в какой пространство и время как существующие, [т. е.] временнóе и пространственное, определены a posteriori.

В связи с этим можно прибавить, что в утверждении Канта о синтетическом характере основоположений чистой геометрии также нет ничего основательного. Указывая, что многие из них действительно аналитичны, он в доказательство представления о синтетичности других приводит только одну аксиому — что прямая линия есть кратчайшее расстояние между двумя точками. «В самом деле, мое *понятие* прямой содержит только качество, но ничего не говорит о количестве. Следовательно, *понятие* кратчайшего [расстояния] целиком присоединяется извне, и никаким расчленением не может быть извлечено из *понятия прямой линии.* Поэтому здесь необходимо прибегать к помощи *созерцания,* посредством которого только и возможен синтез» [81]. — Но и здесь дело идет вовсе не о понятии прямого вообще, а о прямой линии, а она уже есть нечто пространственное, созерцаемое. Определение (или, если угодно, понятие) прямой линии ведь и состоит только в том, что она *безусловно* простая линия, т. е. что в своем выхождении вовне себя (в так называемом движении точки) она безусловно соотносится с собой, что в ее протяжении не положено никакой разницы определения, никакого соотношения с какой-либо другой точкой или линией вне ее; она *безусловно простое направление внутри себя.* Эта простота есть, разумеется, ее качество, и если кажется, что трудно дать аналитическую дефиницию прямой линии, то это только из-за таких определений, как простота или соотношение с самой собой, и лишь потому, что при определении рефлексия сначала имеет дело главным образом с некоей множественностью, с определением через иное. Но само по себе нисколько не трудно понять это определение простоты протяжения внутри себя как чего-то такого, что не определяется через иное. Дефиниция Эвклида не содержит ничего другого, кроме этой простоты. — Но переход этого качества в количественное определение (кратчайшего расстояния), который будто бы составляет синтез, исключительно и всецело аналитичен.

Линия как пространственная есть количество вообще; самое простое, что можно сказать об определенном количестве, это — *«наименьшее»*, а применительно к линии — *«кратчайшее»*. Геометрия может принимать эти определения как следствия из дефиниции; но Архимед в своих книгах о шаре и цилиндре (см. перев. Гаубера, стр. 4)[82] поступил всего целесообразнее, установив указанное определение прямой линии как аксиому, столь же правильно, как это сделал Эвклид, признав аксиомой определение, касающееся параллельных линий, так как развитие этого определения, для того чтобы оно стало дефиницией, также потребовало бы [определений], не непосредственно принадлежащих пространственности, а более абстрактных качественных определений (подобно тому как до этого потребовались такие определения, как простота) — одинаковости направления и т. п. Эти древние [мыслители] и своим наукам сообщили пластический характер, их изложение строго держалось специфики их предмета и поэтому исключало из себя все, что́ было бы ему чуждо.

Понятие, которое Кант выставил в своем учении об *априорных синтетических суждениях,* — понятие о *различенном,* которое также *нераздельно,* о *тождественном,* которое в самом себе есть *нераздельное различие,* — принадлежит великому и бессмертному в его философии. В созерцании это понятие, разумеется, также имеется, ибо оно само понятие, и все в себе есть понятие; но те определения, которые выделены в приведенных примерах, не выражают его; число и счет — это скорее такое тождество и продуцирование такого тождества, которое безусловно есть лишь внешнее тождество, лишь поверхностный синтез, единство «одних», таких «одних», которые скорее положены как в самих себе не тождественные друг другу, а внешние, сами по себе раздельные. В основе определения прямой линии, согласно которому она кратчайшее расстояние между двумя точками, должен лежать скорее лишь момент абстрактного тождества, лишенного различия в самом себе.

Я возвращаюсь от этого отступления к самому сложению. Соответствующее ему отрицательное арифметическое действие, *вычитание,* есть также совершенно аналитическое отделение чисел, которые, как и в сложении, определены лишь как вообще *неравные* в отношении друг друга.

2. Ближайшее определение — *равенство* считываемых чисел. Благодаря этому равенству числа эти суть *единицы,* и в числе появляется различие между единицей и *численностью. Умножение* имеет задачей сложить численность единиц, которые сами суть некая численность. При этом безразлично, какое из двух чисел принимается за единицу и какое за численность, безразлично, говорим ли мы четырежды три, где четыре есть численность, а три — единица, или, наоборот, трижды четыре. — Мы уже указали выше, что сначала находят произведение простым нумерованием, т. е. счетом на пальцах и т. д.; позднее становится возможным *непосредственно* указать произведение благодаря своду результатов подсчета — таблице умножения и знанию ее наизусть.

Деление есть отрицательное арифметическое действие, согласно тому же определению различия. Здесь также безразлично, делитель ли или частное принимается за единицу или за численность. Делитель принимается за единицу, а частное — за численность, когда задачей деления объявляется желание узнать, *сколько раз* (численность) *одно* число (единица) содержится в данном числе; наоборот, делитель принимается за численность, а частное — за единицу, когда говорят, что требуется разделить некоторое число на данную численность одинаковых частей и найти величину такой части (единицы).

3. Оба числа, которые определены одно относительно другого как единица и численность, как числа еще непосредственны относительно друг друга и потому вообще *не равны.* Дальнейшее равенство — это равенство самой единицы и численности; таким образом, продвижение к равенству определений, заключающихся в определении числа, завершено. Счет согласно этому полному равенству есть *возведение в степень* (отрицательное арифметическое действие [здесь] — извлечение корня) и прежде всего возведение числа в *квадрат;* это полная определенность нумерования внутри самого себя, где 1) прибавляющиеся многие числа суть одни и те же, и 2) само их множество или численность тождественно тому числу, которое берется многократно и служит единицей. Нет никаких иных определений в понятии числа, которые

могли бы быть некоторым различием, и не может также иметь место какое-либо дальнейшее выравнивание различия, заключающегося в числе. Возведение в степени высшие, чем в квадрат, есть *формальное* продолжение; с одной стороны, при четных показателях, оно есть лишь *повторение* возведения в квадрат, а с другой — при нечетных показателях — вновь возникает неравенство, а именно при формальном равенстве (например, прежде всего в кубе) нового множителя и численности, и единице, он как единица есть нечто неравное по отношению к численности (по отношению ко второй степени, 3 — по отношению к 3×3); еще большее неравенство имеется при кубической степени четырех, где численность 3, показывающая, сколько раз число, служащее единицей, должно быть помножено само на себя, отлична от этого числа. — Эти определения имеются в себе как сущностное различие понятия, — численность и единица, и для того чтобы выхождение-вовне-себя целиком оказалось возвращением-внутрь-себя, они должны быть выравнены. В только что изложенном заключается, далее, основание, почему, с одной стороны, решение уравнений высших степеней должно состоять в приведении их к квадратным уравнениям, и почему, с другой стороны, уравнения нечетных степеней могут быть определены лишь формально, и как раз, когда корни рациональны, они могут быть найдены не иначе как при помощи мнимого выражения, противоположного корням и тому, что́ они выражают. — Согласно сказанному, только арифметический квадрат содержит в себе безусловную определенность (Schlechthin-Bestimmtsein), вследствие чего уравнения дальнейших формальных степеней должны быть приведены к нему; точно так же как в геометрии прямоугольный треугольник содержит безусловную внутри-себя-определенность, выраженную в Пифагоровой теореме, и поэтому для полного определения всех прочих геометрических фигур они должны быть сведены к нему.

В преподавании, продвигающемся согласно логически построенному суждению, изложение учения о степенях предшествует изложению учения о пропорциях; последние, правда, примыкают к различию между единицей и численностью, составляющему определение второго арифметического действия, однако они выходят за пределы «одного» как *непосредственного* определенного количества, в котором единица и численность суть лишь моменты; дальнейшее определение по этим моментам[83] остается для него самого также еще внешним. В отношении число уже не есть *непосредственное* определенное количество; последнее имеет в этом случае свою определенность как опосредствование; количественное[84] отношение мы рассмотрим далее.

Об указанном выше дальнейшем определении арифметических действий можно сказать, что оно не есть философствование о них, не есть, скажем, разъяснение их внутреннего значения, потому что оно действительно не имманентное развитие понятия. Философия же должна уметь различать то, чтó по своей природе есть внешний самому себе материал, [должна знать], что в таком материале развитие понятия может происходить лишь внешним образом и что моменты этого развития могут существовать лишь в присущей им форме внешности, каковы здесь равенство и неравенство. Различение сфер, к которым принадлежит та или другая определенная форма понятия, т. е. имеющаяся как существование, есть важное условие философствования о реальных предметах, необходимое для того, чтобы мы, оперируя идеями, не нарушали особенности внешнего и случайного и чтобы мы не искажали этих идей и не делали их формальными из-за неадекватности материала. Но внешний характер, при котором выявляются моменты понятия в указанном выше внешнем материале — в числе, есть здесь адекватная форма; так как они представляют нам предмет в рассудочном понимании его, а также ввиду того, что они не требуют никакого спекулятивного подхода и потому кажутся легкими, их стоит применять в элементарных учебниках.

Примечание 2

[Употребление числовых определений для выражения философских понятий]

Как известно, Пифагор изображал в *числах разумные отношения* или *философемы,* да и в новейшее время философия применяла числа и формы их соотношений, как, например, степени и т. п., для упорядочения мыслей в соответствии с ними или выражения ими мыслей. — С педагогической точки зрения число признавалось наиболее подходящим предметом внутреннего созерцания, а занятие вычислением его отношений — деятельностью духа, в которой он делает наглядными свои подлинные отношения и вообще основные отношения сущности. — В какой мере эта высокая ценность принадлежит числу, видно из его понятия, каким оно получилось выше.

Число предстало перед нами как абсолютная определенность количества, а его стихия — как различие, ставшее безразличным; оно оказалось определенностью в себе, которая в то же время положена лишь совершенно внешне. Арифметика — аналитическая наука, так как все относящиеся к ее предмету связи и различия не находятся в нем самом, а навязаны ему совершенно извне. Она не имеет конкретного предмета, который содержал бы внутренние отношения, которые первоначально скрыты для знания, не даны в непосредственном представлении о нем, а должны быть выявлены лишь усилиями познавания. Она не только не содержит понятия и, следовательно, задачи для постигающего в понятиях (für das begreifende) мышления, но есть его противоположность. Из-за безразличия приведенного в связь к самой этой связи, которой недостает необходимости, мышление занимается здесь деятельностью, которая есть в то же время самое крайнее отчуждение (Entäusserung) от самого себя, занимается насильственной деятельностью, — оно *движется* в сфере *безмыслия* и приводит в связь то, что́ не способно быть необходимым. Предметом [здесь] служит абстрактная мысль о самой *внешности* (Äusserlichkeit).

Будучи такой *мыслью* о внешности, число есть в то же время абстракция от чувственного многообразия; от чувственного оно сохранило только абстрактное определение внешности; благодаря этому в числе чувственное ближе всего подведено к мысли. Число есть *чистая мысль* о самоотчуждении мысли.

Возвышающийся над чувственным миром и познающий свою сущность дух, ища стихию для своего чистого *представления,* для *выражения своей сущности,* может поэтому до того, как постигнет, что эта стихия есть сама мысль, и обретет для ее изображения чисто духовное выражение, вздумать избрать для этого *число,* эту внутреннюю, абстрактную внешность. Поэтому мы видим в истории науки, что уже рано применяли число для выражения философом. Оно составляет последнюю ступень несовершенства, когда всеобщее берется как обремененное чувственным. Древние [мыслители] явно сознавали, что число находится посередине между чувственным и мыслью. Согласно Аристотелю («Метафизика», I, 5), Платон говорил, что помимо чувственного и идей посередине между ними находятся математические определения вещей; от чувственного они отличаются тем, что они невидимы (вечны) и неподвижны, а от идей — тем, что они суть нечто множественное и сходное, между тем как идея лишь всецело тождественна с собой и внутренне едина. — Более подробное, основательно продуманное рассуждение об этом Модерата из Кадиса[85] приводится в Malchi vita Pythagorae ed. Ritterhus, p. 30 и сл.: то, что пифагорейцам пришла в голову мысль обратиться к числам, он объясняет тем, что они еще не были в состоянии *ясно* постигнуть *разумом* основные идеи и первые принципы, потому что трудно мыслить и выразить эти принципы; при преподавании числа хорошо служат для обозначения; пифагорейцы, между прочим, подражали в этом геометрам, которые, не умея выражать телесное в мысли, применяют фигуры и говорят, что *это* — треугольник, требуя, чтобы не принимали за треугольник предлежащий чертеж, а лишь представляли себе с его помощью мысль о треугольнике. Так, например, пифагорейцы выразили как *единицу* (Eins) мысль о единстве, тождественности и равенстве, а также основание согласия, связи и сохранения всего, основание тождественного с самим собой и т. д. — Излишне заметить, что пифагорейцы перешли от выражения в числах и к выражению в мыслях, к определенно названным категориям равного и неравного, границы и бесконечности; уже относительно указанного выше выражения в числах сообщается (там же, в примечаниях к стр. 31 цитированного издания, взятых из «Leben des Pythagoras» bei Photius, p. 722)[86], что пифагорейцы проводили различие между монадой и единицей; монаду они принимали за мысль, а единицу — за число; и точно так же число два они принимали за арифметическое выражение, а диаду (ибо таково, видимо, то название, которое оно у них носит) — за мысль о неопределенном. — Эти древние, во-первых, очень ясно видели неудовлетворительность числовой формы для выражения определений мысли, и столь же правильно они, далее, требовали найти подлинное выражение для мысли вместо первого выражения, принятого за неимением лучшего;

насколько опередили они в своих размышлениях тех, кто в наше время снова считает чем-то похвальным и даже основательным и глубоким замену определений мысли самими числами и числовыми определениями, как, например, степенями, а затем — бесконечно большим, бесконечно малым, единицей, деленной на бесконечность, и прочими подобного рода определениями[87], которые сами часто представляют собой превратный математический формализм, — считает основательным и глубоким возвращение к упомянутому беспомощному детству.

Что касается приведенного выше выражения, что число занимает промежуточное положение между *чувственным* и мыслью, имея в то же время то общее с первым, что оно по своей природе (an ihr) *«многое»*, внеположное, то следует заметить, что само это «многое», принимаемое в мысль чувственное, есть принадлежащая мысли категория внешнего в самом себе. Дальнейшие, конкретные, истинные *мысли* — наиболее живое, наиболее подвижное, *понятое* только как *находящееся в соотнесении* — превращаются в мертвенные, неподвижные определения, когда их перемещают в эту стихию вовне-себя-бытия. Чем богаче определенностью и, стало быть, соотношением становятся мысли, тем, с одной стороны, более запутанным, а с другой — более произвольным и лишенным смысла становится их изложение в таких формах, как числа. Единица, два, три, четыре, генада или монада, диада, триада, тетрактис еще близки к совершенно *простым абстрактным* понятиям; но когда числа должны переходить к [изображению] конкретных отношений, тогда тщетно стремление сохранить их еще близкими к понятию.

Когда же для [характеристики] движения понятия (только благодаря этому движению оно и есть понятие) обозначают определения мысли через одно, два, три, четыре, этим предъявляется к мышлению самое жестокое требование. Мышление движется тогда в стихии своей противоположности, отсутствия соотношений. Его дело становится тогда работой безумия. Постигнуть, например, что одно есть три, а три — одно, потому так трудно, что одно лишено соотношений и, следовательно, не обнаруживает в самом себе того определения, посредством которого оно переходит в свою противоположность, а, напротив, состоит именно в полном исключении такого рода соотношения и отказе от него. Рассудок, наоборот, пользуется этим против спекулятивной истины (например, против истины учения, называемого учением о триединстве) и *перечисляет* те ее определения, которые составляют одно единство, чтобы представить ее как явную бессмыслицу, т. е. он сам впадает в бессмыслицу, превращая в лишенное соотношений то, что́ всецело есть соотношение. Слово «триединство» употребляется, конечно, не в расчете на то, что рассудок будет рассматривать *единицу* и число как *сущностную* определенность содержания. Это слово выражает собой презрение к рассудку, который в своем тщеславии, однако, упорно держится единицы и числа, как такового, и выставляет это тщеславие как оружие против разума.

Принимать числа, геометрические фигуры просто за *символы,* как это часто проделывали с кругом, треугольником и т. д. (круг, например, принимался за символ вечности, треугольник — за символ триединства), есть, с одной стороны, нечто совершенно невинное; но нелепо, с другой стороны, предполагать, что этим выражают нечто большее, чем то, что́ *мысль* способна *постигнуть* и *выразить.* Если в таких символах, как и в других, создаваемых *фантазией* в народной мифологии и вообще в поэзии, в сравнении с которыми чуждые фантазии геометрические фигуры к тому же убоги, — если в этих символах — глубокая мудрость, глубокое *значение,* то как раз задача одного лишь мышления сделать явной мудрость, которая *в них* лишь *сокрыта (darin* liegt), и не только *в* символах, но и *в* природе и *в* духе. В символах истина из-за чувственного элемента еще *помутнена* и *прикрыта;* она полностью обнаруживается сознанию только в форме мысли; [их] *значением* служит лишь сама мысль.

Но заимствование математических категорий с целью что-то определить для метода или содержания философской науки потому оказывается по своему существу чем-то превратным, что, поскольку математические формулы обозначают мысли и различия понятия, это их значение скорее должно быть сначала указано, определено и обосновано в философии. В своих конкретных науках философия должна почерпать логическое из логики, а не из математики. Для [выявления] логического в философии обращаться к тем формам (Gestaltungen), которые это логическое принимает в других науках и из которых одни суть только предчувствия, а другие даже искажения логического — это может быть лишь крайним средством, к которому прибегает философское бессилие. Простое применение таких заимствованных формул есть, кроме того, внешний способ действия; самому применению должно было бы предшествовать осознание и их ценности, и их значения; но такое осознание дается лишь рассмотрением с помощью мысли, а не авторитетом, который эти формулы приобрели в математике. Сама логика есть такое осознание их, и это осознание сбрасывает их частную форму, делает ее излишней и никчемной, исправляет ее, и исключительно лишь оно дает им обоснование, смысл и ценность.

Какое значение имеет пользование числом и счетом, поскольку оно должно составлять главную *педагогическую* основу, это из предшествующего само собой ясно. Число — нечувственный предмет, и занятие им и его сочетаниями — нечувственное занятие; дух, следовательно, этим приучается к рефлексии в себя и к внутренней абстрактной работе, чтó имеет большое, но все же одностороннее значение. Ибо, с другой стороны, так как в основе числа лежит лишь внешнее, чуждое мысли различие, то указанная работа становится безмысленной, механической. Требуемое ею напряжение состоит главным образом в том, чтобы удержать то, чтó чуждо понятия, и комбинировать его, не прибегая к понятию. Содержанием здесь служит пустое «одно»; подлинное содержание нравственной и духовной жизни и индивидуальных ее форм, которое, как благороднейшая пища, должно служить средством воспитания юношеского духа, вытесняется бессодержательным «одним». Результатом этих упражнений, когда их делают главным делом и основным занятием, может быть только то, что дух по форме и содержанию опустошается и притупляется. Так как счет есть столь внешнее, стало быть, механическое занятие, то оказалось возможным изобрести *машины*, совершеннейшим образом выполняющие арифметические действия. Если бы о природе счета было известно хотя бы только одно это обстоятельство, то одним этим был бы решен вопрос, какова ценность мысли сделать счет главным средством воспитания духа и этим подвергать его пытке — усовершенствовать себя до такой степени, чтобы стать машиной.

В. ЭКСТЕНСИВНОЕ И ИНТЕНСИВНОЕ ОПРЕДЕЛЕННОЕ КОЛИЧЕСТВО

а) Различие между ними

1. Определенное количество, как явствует из предыдущего, имеет свою определенность как границу в *численности*. Оно есть некое внутри себя дискретное, некое «многое», не имеющее такого бытия, которое было бы отлично от его границы и имело бы ее вовне себя. Определенное количество, взятое таким образом со своей границей, которая есть некое множественное в самой себе, есть *экстенсивная величина*.

Следует отличать *экстенсивную* величину от *непрерывной*. Первой непосредственно противоположна не *дискретная*, а *интенсивная* величина. Экстенсивная и интенсивная величины суть определенности самой количественной *границы*, определенное же количество тождественно со своей границей. Непрерывная же и дискретная величины суть определения *величины в себе*, т. е. количества, как такового, поскольку, имея дело с определенным количеством, отвлекаются от границы. — Экстенсивная величина имеет момент непрерывности в самой себе и в своей границе, так как ее «многое» есть вообще непрерывное; постольку граница как отрицание выступает в *этом равенстве* «многих» как ограничение единства. Непрерывная величина есть продолжающее себя количество безотносительно к какой бы то ни было границе, и, поскольку ее представляют себе с такой границей, последняя есть ограничение вообще, *в котором дискретность не положена.* Определенное количество, взятое лишь как непрерывная величина, определено для себя еще не истинно, так как в ней отсутствуют «одно», в котором заключается для-себя-определенность, и число. И точно так же дискретная величина есть непосредственно лишь различенное «многое» вообще, которое, поскольку оно, как таковое, должно было бы иметь границу, было бы только множеством, т. е. чем-то неопределенно ограниченным; чтобы оно было определенным квантом, для этого требуется сочетание «многих» воедино, благодаря чему они полагаются тождественными с границей. Каждой — и непрерывной, и дискретной — величиной как *определенным количеством* вообще положена в ней лишь одна из двух сторон, которыми оно вполне определено и благодаря которым оно дано как *число*. Число есть непосредственно *экстенсивное* определенное количество, *простая* определенность, данная по своему существу как *численность*, однако численность одной и той же *единицы;* определенное количество отлично от числа лишь тем, что определенность в числе явно положена как множественность.

2. Определить посредством числа, как велико нечто, можно, не устанавливая отличия его от чего-то другого, обладающего величиной, иначе для определенности его требовались бы оно само и нечто другое, обладающее величиной; оно в этом не нуждается потому, что определенность величины есть вообще для-себя-определенная, безразличная, просто с собой соотнесенная граница, а в числе она положена как заключенная в для-себя-сущее «одно», и имеет внешность, соотношение-с-иным, *внутри самой себя*. Далее, это присущее самой границе «многое», как «многое» вообще, не есть нечто неравное внутри себя, а есть нечто непрерывное. Каждое из «многих» есть то же самое, что иное; поэтому оно как вне-друг-друга-сущее или дискретное «многое» не составляет определенности, как таковой. Это «многое», стало быть, сливается само по себе в свою непрерывность и становится простым единством. — Численность есть лишь момент числа, но *как множество числовых «одних» оно не составляет* определенности числа, а эти «одни» как безразличные, внешние себе сняты в возвращенности числа в себя. Внешность, составлявшая «одни» во множестве, исчезает в «одном» как соотношении числа с самим собой.

Граница определенного количества, которое как экстенсивное имело свою налично сущую определенность в виде внешней самой себе численности, переходит, следовательно, в *простую определенность*. В этом простом определении границы оно *интенсивная величина;* и граница, или определенность, которая тождественна с определенным количеством, теперь так и положена как простое; это *градус*.

Градус, следовательно, есть определенная величина, определенное количество, но не есть вместе с тем множество (Menge) или много [«одних»] *внутри самого себя;* он только некая *многость* (Mehrheit), причем *многость* есть «многое», сведенное в *простое* определение, наличное бытие, возвратившееся в для-себя-бытие. Его определенность должна быть, правда, выражена некоторым *числом* как полной определенностью определенного количества, но она дана не как *численность,* а просто, только как градус. Когда говорят о десяти, двадцати градусах, именно определенное количество, имеющее столько градусов, есть десятый, двадцатый градус, а не численность и сумма этих градусов, — в таком случае оно было бы экстенсивным количеством, — а оно лишь один градус: десятый, двадцатый градус. Он содержит определенность, заключающуюся в численности «десять», «двадцать», но не содержит их как «многие», а есть число как *снятая* численность, как *простая* определенность.

3. В числе определенное количество положено в своей полной определенности; а как интенсивное определенное количество (которое есть для-себя-бытие числа) определенное количество положено таким, каково оно по своему понятию, или в себе. А именно, та форма соотношения с собой, которую оно имеет в градусе, есть в то же время *его внешнее-себе-бытие.* Число как экстенсивное определенное количество есть числовая множественность и имеет таким образом внешность внутри себя; эта последняя, как «многое» вообще, сливается в неразличимость и снимает себя в числовом «одном» (in dem Eins der Zahl), в соотношении числа с самим собой. Но определенное количество имеет свою определенность в виде численности; оно, как было указано выше, содержит ее, хотя она уже не положена в нем. Таким образом, *градус,* который, как простой внутри самого себя, уже *не имеет* этого *внешнего инобытия внутри себя,* имеет его *вовне себя* и соотносится с ним как со своей определенностью. Внешняя ему множественность составляет определенность той простой границы, которая он есть сам по себе. То, что численность, поскольку в экстенсивном определенном количестве она должна была находиться внутри числа, сняла себя там, — это определяется, следовательно, так, что она положена вне числа. Так как число положено как «одно», как рефлектированное в себя соотношение с самим собой, то оно исключает из себя безразличие и внешний характер численности и есть *соотношение с собой как соотношение через само себя с чем-то внешним.*

В градусе определенное количество имеет соответствующую своему понятию реальность. *Безразличие* определенности составляет его качество, т. е. определенность, которая в самой себе дана как внешняя себе определенность. — Согласно этому градус есть простая определенность величины *среди* некоторого *множества* таких интенсивностей, которые различны и каждая из которых есть лишь простое соотношение с самим собой, но которые в то же время находятся в сущностном соотношении друг с другом, так что каждая имеет свою определенность в этой непрерывности с другими. Это соотношение градусов через самих себя со своим иным делает восхождение и нисхождение по шкале градусов непрерывным процессом, течением, которое есть непрерывающееся, неделимое изменение. Каждое из многих, различаемых в этом [процессе], не отделено от других, а имеет свою определенность (Bestimmtsein) только в них. Как соотносящееся с собой определение величины каждый из градусов безразличен к другим; но он в такой же мере и соотнесен в себе с этой внешностью; то, что́ он есть, он есть только посредством нее; его соотношение с собой есть небезразличное соотношение с внешним, имеет в этом соотношении свое качество.

b) Тождество экстенсивной и интенсивной величины

Градус не есть внутри себя нечто внешнее себе. Он, однако, не есть *неопределенное* «одно», этот принцип числа вообще, который не есть численность, разве только отрицательная, заключающаяся в том, чтобы не быть численностью. Интенсивная величина есть прежде всего некоторое простое *«одно» из «многих»;* имеются многие градусы; однако они не *определенны* ни как простое «одно», ни как «многие», а определенны лишь в *соотношении этого вовне-себя-бытия* или, иначе говоря, в тождестве «одного» и множественности. Если, таким образом, «многие», как таковые, и находятся вне простого градуса, то в его соотношении с ними и состоит его определенность. Он, стало быть, содержит численность. Точно так же как двадцать в качестве экстенсивной величины содержит двадцать «одних» как дискретных, так и определенный градус содержит их как непрерывность, которую просто образует собой эта определенная множественность. Он есть *двадцатый* градус, и он двадцатый градус лишь посредством этой численности [«двадцать»], которая, как таковая, находится вне его.

Определенность интенсивной величины должна быть поэтому рассмотрена с двух сторон. Эта величина определена через *другие* интенсивные определенные количества и находится в непрерывной связи со своим инобытием, так что в этом соотношении с последним и состоит ее определенность. И вот, поскольку она, *во-первых,* есть *простая* определенность, она определена в *противопоставлении* другим градусам; она их исключает из себя и имеет свою определенность в этом исключении. Но она, *во-вторых,* определена в самой себе; она определена в численности как в *своей* численности, а не в ней как исключенной или, иначе говоря, не в численности других градусов. Двадцатый градус содержит двадцать [градусов] в самом себе; он не только определен как отличающийся от девятнадцатого, двадцать первого и т. д., а его определенность есть *его* численность. Но поскольку эта численность есть его численность, а определенность в то же время дана сущностно как численность, он есть экстенсивное определенное количество.

Экстенсивная и интенсивная величины суть, следовательно, одна и та же определенность определенного количества; они отличаются между собой только тем, что одна имеет численность внутри себя, а другая — вовне себя. Экстенсивная величина переходит в интенсивную, так как ее «многое» само по себе сводится в единицу, вне которой выступает «многое». И наоборот, это простое имеет свою определенность только в численности и притом как в *своей* численности; как безразличное к иначе определенным интенсивностям оно имеет внешний характер численности в самом себе; таким образом, интенсивная величина есть по своему существу также и экстенсивная величина.

Вместе с этим тождеством появляется *качественное нечто,* ибо это тождество есть единица, соотносящаяся с собой через *отрицание своих различий,* а эти различия составляют налично сущую определенность величины. Это отрицательное тождество есть, следовательно, *нечто* и притом нечто, безразличное к своей количественной определенности. *Нечто* — это некое определенное количество; но теперь качественное наличное бытие, как оно есть в себе, *положено* как безразличное к этому [обстоятельству]. Можно было раньше говорить об определенном количестве, о числе, как таковом, и т. д. без какого-либо нечто, которое было бы его субстратом. Но теперь нечто как *налично сущее для себя* противостоит этим своим определениям, будучи *опосредствовано* с собой через отрицание последних, и, имея некоторое определенное количество, противостоит как нечто, которое имеет и экстенсивное и интенсивное определенное количество. Его *единая* определенность, которую оно имеет как определенное количество, положена в различенных моментах *единицы* и *численности;* она одна и та же не только *в себе,* полагание ее в этих различиях как экстенсивного и интенсивного определенного количества есть возвращение в это единство, которое как отрицательное есть нечто, положенное безразличным к ним.

Примечание 1
[Примеры этого тождества]

В обыденном представлении *экстенсивное* и *интенсивное определенные количества* всегда различаются как *виды величин* так, как если бы были одни предметы, имеющие только интенсивную величину, а другие — только экстенсивную величину. К этому прибавилось еще представление некоей философии природы, которое превращало множественное, *экстенсивное,* например в основополагающем определении материи как того, чтó наполняет пространство, равно как и в других понятиях, — в *интенсивное* в том смысле, что интенсивное как *динамическое* есть-де истинное определение, и, например, плотность или, иначе говоря, специфическое наполнение пространства следует понимать по своему существу не как некоторое *множество* и *численность* материальных частей в определенном количестве пространства, а как некоторую *степень* (Grad) наполняющей пространство *силы* материи.

При этом следует различать двоякого рода определения. В том, чтó назвали преобразованием механического способа рассмотрения в динамический, встречаются понятие *существующих друг вне друга самостоятельных частей,* которые лишь внешне соединены в некое целое, и отличное от первого понятие *силы.* То, чтó в наполнении пространства признается, с одной стороны, лишь некоторым множеством внешних друг другу атомов, рассматривается, с другой стороны, как проявление лежащей в основе простой силы. — Но этим отношениям целого и частей, силы и ее проявления, которые противополагаются друг другу, здесь еще не место, они будут рассмотрены в последующем. Однако уже здесь можно указать на то, что хотя отношение *силы* и ее проявления, соответствующее [понятию] интенсивного, и есть прежде всего более истинное отношение по сравнению с отношением целого и частей, однако сила еще не становится от этого менее односторонней, чем интенсивное, и *проявление* — внешность экстенсивного — точно так же *неотделимо* от силы, так что в обеих формах, и в экстенсивном и в интенсивном, имеется *одно и то же содержание.*

Другая определенность здесь — это *количественная* определенность, как таковая, которая снимается как экстенсивное определенное количество и превращается в степень, которая как будто и составляет истинное определение; но мы уже показали, что степень содержит также первое определение, так что одна форма сущностна для другой и, следовательно, всякое наличное бытие обнаруживает свое определение величины и как экстенсивное, и как интенсивное определенное количество.

Примером этого служит здесь поэтому все на свете, поскольку оно выступает в некотором определении величины. Даже *число* необходимо имеет непосредственно в самом себе эту двоякую форму: оно некоторая численность и постольку экстенсивная величина; но оно также «одно» — десяток, сотня и постольку начинает переходить в интенсивную величину, так как в этой единице множественное сливается в простое. «Одно» есть *в себе* экстенсивная величина, его можно представить как любую численность частей. Так, *десятое, сотое* есть это простое, интенсивное, имеющее свою определенность в находящемся вне его «многом», т. е. в экстенсивном. Число — это десять, сто и в то же время в системе чисел — десятое, сотое; и то и другое есть одна и та же определенность.

«Одно» в круге называется *градусом,* потому что часть *круга* имеет по своему существу определенность в «многом», находящемся вне этой части, определена как одно из замкнутой численности таких «одних». Градус круга, взятый как простая пространственная величина, есть лишь обычное число; рассматриваемый же как градус, он интенсивная величина, имеющая смысл лишь как определенная численностью градусов, на которые разделен круг, подобно тому как число вообще имеет смысл только в числовом ряде.

Величина более конкретного предмета проявляет свою двойственность (то, что она и экстенсивная, и интенсивная величина) в двояком определении его наличного бытия: в одном из этих определений предмет выступает как что-то *внешнее*, а в другом — как что-то *внутреннее*. Так, *масса* как вес есть *экстенсивная величина*, поскольку она составляет некоторую численность фунтов, центнеров и т. д., и она же *интенсивная величина*, поскольку оказывает некоторое давление. Величина давления есть нечто простое, степень, имеющая свою определенность в шкале степеней давления. Как оказывающая давление, масса выступает как внутри-себя-бытие, как субъект, которому присуще различие интенсивной величины. — И наоборот, то, чтó оказывает эту *степень* давления, способно сдвинуть с места некоторую *численность* фунтов и т. д. и этим измеряет свою величину.

Или, скажем, *теплота* имеет некоторую *степень:* степень теплоты, будь она 10-я, 20-я и т. д., есть некоторое простое ощущение, нечто субъективное. Но эта степень существует и как *экстенсивная* величина, как расширение некоторой жидкости, например ртути в термометре, воздуха или глины и т. д. Более высокая степень температуры выражается как более длинный ртутный столбик или как более узкий глиняный цилиндр; она нагревает большее пространство таким же образом, как меньшая степень температуры нагревает лишь меньшее пространство.

Более высокий *тон* как более *интенсивный* есть в то же время *большее число* колебаний; или другой пример: более громкий тон, которому приписывается более высокая *степень*, слышен в более обширном пространстве. — Более интенсивной *краской* можно одинаково окрасить бóльшую поверхность, чем более слабой краской; или [еще пример]: *более светлое* — другой вид интенсивности — видно дальше, чем менее светлое, и т. д.

Точно так же и в *духовной сфере высокая интенсивность* характера, таланта, гения имеет столь же *широкий охват, широкое* влияние и *обширные* контакты. *Наиболее глубокое* понятие имеет *наиболее общее* значение и применение.

Примечание 2
[Применение Кантом определения степени к бытию души]

Кант своеобразно применил определенность интенсивного определенного количества к метафизическому определению *души*. В критике метафизических положений о душе, которые он называет паралогизмами чистого разума, он рассматривает умозаключение от простоты души к ее неуничтожимости. Против этого умозаключения он возражает (Kr. d. r. Vern., S. 414), что «если бы даже мы и признали душу простой сущностью, поскольку в ней нет ничего многообразного, [составные части] которого существовали бы вне друг друга, стало быть, в ней нет никакой *экстенсивной* величины, все же нельзя отрицать у нее, *как и у всего существующего*, *интенсивной* величины, т. е. степени реальности в отношении всех ее способностей и вообще всего того, чтó составляет [ее] существование, а эта интенсивная величина может *убывать* через *бесконечное множество меньших степеней*, и, таким образом, предполагаемая субстанция может превратиться в ничто если не путем деления, то путем постепенного ослабления (remissio) ее сил; ведь даже *сознание* всегда имеет *степень*, которая может быть еще уменьшена, следовательно, тем же свойством обладает также самосознание и все прочие способности» [88]. — В рациональной психологии, которая была абстрактной метафизикой, душа рассматривается не как дух, а как нечто лишь непосредственно *сущее*, как *душа-вещь*. Таким образом Кант вправе применять к ней категорию определенного количества, «как и ко всему существующему», а поскольку это существующее определено как простое, Кант вправе применять к нему категорию интенсивного определенного количества. Духу, конечно, присуще *бытие*, но совершенно другой интенсивности, чем интенсивность интенсивного определенного количества, вернее, ему присуща такая интенсивность, в которой форма лишь непосредственного бытия и все его категории даны как снятые. Нужно было допустить устранение не только категории экстенсивного определенного количества, но и категории определенного количества вообще. Следует, однако, еще узнать, каким образом в вечной природе духа находятся и из нее проистекают наличное бытие, сознание, конечность, причем дух от этого не становится вещью.

c) Изменение определенного количества

Различие между экстенсивным и интенсивным определенными количествами безразлично для определенности определенного количества, как таковой. Но вообще определенное количество есть определенность, положенная как снятая, есть безразличная граница, определенность, которая в такой же мере есть и отрицание самой себя. В экстенсивной величине это различие развито, интенсивная же величина есть *наличное бытие* этой внешности, которая есть внутри себя определенное количество. [В интенсивном определенном количестве] это различие положено как его противоречие внутри самого себя — оно такого рода простая, *соотносящаяся с собой* определенность, которая есть отрицание самой себя, имеет свою определенность не в самой себе, а в некотором другом определенном количестве.

Определенное количество, следовательно, по своему качеству положено в абсолютной непрерывности со своей внешностью, со своим инобытием. Оно поэтому не только *может* выходить за пределы всякой определенности величины, эта определенность не только *может* изменяться, но *положено* именно то, что она *должна* изменяться. Определение величины продолжает себя, непрерывно переходя в свое инобытие таким образом, что оно имеет свое бытие только в этой непрерывности с некоторым иным; оно не *сущая*, а *становящаяся* граница.

«Одно» бесконечно или, иначе говоря, оно соотносящееся с собой отрицание и потому отталкивание себя от самого себя. Определенное количество также бесконечно, оно положено *как* соотносящаяся с собой отрицательность; оно отталкивает себя от самого себя. Но оно *определенное* «одно», такое «одно», которое перешло в наличное бытие и границу, следовательно, есть отталкивание определенности от самой себя, порождение не того, что́ равно самому себе, каково отталкивание «одного», а порождение своего инобытия; в нем самом теперь положено, что оно *выводит за пределы* само себя и становится иным. Оно состоит в том, чтобы увеличиваться или уменьшаться; оно внешность определенности в самом себе.

Определенное количество, стало быть, выводит за пределы само себя; это иное, которым оно становится, само есть прежде всего определенное количество; но оно в такой же мере дано как не сущая граница, а выталкивающая себя за самое себя. Граница, вновь возникшая в этом выхождении, следовательно, есть безусловно лишь такая граница, которая снова снимает себя и выводит себя к следующей границе, *и так далее до бесконечности.*

С. КОЛИЧЕСТВЕННАЯ БЕСКОНЕЧНОСТЬ

а) Ее понятие

Определенное количество изменяется и становится другим определенным количеством. Дальнейшее определение этого изменения, а именно что оно продолжается *до бесконечности,* состоит в том, что определенное количество выступает как противоречащее себе в самом себе. — Определенное количество становится неким *иным;* но оно *продолжает* себя, переходя в свое инобытие; иное, следовательно, также есть определенное количество. Но последнее есть иное не только *того или другого* определенного количества (eines Quantums), но и *самого* определенного количества, как такового (des Quantums), отрицание его как ограниченного, следовательно, есть его неограниченность, *бесконечность.* Определенное количество есть *долженствование.* Его содержание — *быть определенным для себя,* а быть определенным для себя означает скорее *быть определенным в ином,* и, наоборот, оно снятая определенность в ином, *безразличное* устойчивое существование для себя.

Ввиду этого конечность и бесконечность сразу же приобретают каждая в самой себе двоякое и притом противоположное значение. Определенное количество *конечно,* во-первых, как ограниченное вообще и, во-вторых, как то, чтó выводит за пределы само себя, как определенность в ином. *Бесконечность* же его есть, во-первых, его неограниченность (Nichtbegrenztsein) и, во-вторых, его возвращенность в себя, безразличное для-себя-бытие. Если мы сразу сравним между собой эти моменты, то окажется, что определение конечности определенного количества, вывод за пределы самого себя к иному, в котором заключено его определение, есть в такой же мере определение бесконечного; отрицание границы есть тот же выход за определенность, так что определенное количество имеет в этом отрицании, в бесконечном, свою последнюю определенность. Другой момент бесконечности — безразличное к границе для-себя-бытие; само же определенное количество ограничено таким образом, что оно само по себе безразлично к своей границе и, значит, к другим определенным количествам и к выходу за свои пределы. Конечность и (долженствующая быть отдельной от нее, дурная) бесконечность, если это касается определенного количества, уже имеют каждая в самой себе момент другой.

Качественное и количественное бесконечное отличаются друг от друга тем, что в первом противоположность между конечным и бесконечным качественна и переход конечного в бесконечное или, иначе говоря, их соотношение имеется лишь во *«в-себе»*, в их понятии. Качественная определенность дана как непосредственная и соотносится по своему существу с инобытием как с другим для нее бытием; она не *положена* имеющей *в самой себе* свое отрицание, свое иное. Величина же, как таковая, есть *снятая* определенность; она *положена* так, чтобы быть неравной себе и безразличной к самой себе, следовательно, быть тем, что́ изменяется. Качественные конечное и бесконечное поэтому абсолютно, т. е. абстрактно, противостоят друг другу; их единством служит лежащее в основе *внутреннее* соотношение. Конечное поэтому продолжает себя, переходя в свое иное, только *в себе,* а не *в самом себе.* Количественное же конечное *соотносится в самом себе* со своим бесконечным, в котором оно имеет свою абсолютную определенность. Это их соотношение представляет собой прежде всего *количественно бесконечный прогресс.*

b) Количественный бесконечный прогресс

Прогресс в бесконечное есть вообще выражение противоречия, в данном случае — выражение того противоречия, которое содержится в количественно конечном или, иными словами, в определенном количестве вообще. Он есть то взаимоопределение конечного и бесконечного, которое мы рассмотрели выше в сфере качества, с тем различием, что, как мы только что указали, в количественном граница в самой себе выводит себя в свое потустороннее и продолжается в нем, и тем самым, наоборот, и количественно бесконечное положено имеющим в самом себе определенное количество; ибо в своем вовне-себя-бытии определенное количество есть в то же время оно само, его внешность принадлежит его определению.

Бесконечный прогресс есть лишь *выражение* этого противоречия, а *не* его *разрешение;* но из-за непрерывного перехода одной определенности в другую он дает кажущееся разрешение в виде соединения обеих. В том виде, как он первоначально положен, он есть *заданность* бесконечного, а не его достижение, есть постоянное *порождение* его, причем он не выходит за само определенное количество, и бесконечное не становится чем-то положительным и наличным. В понятии определенного количества содержится его *потустороннее.* Это потустороннее есть, *во-первых,* абстрактный момент *небытия* определенного количества; последнее разлагается в себе самом; таким образом оно соотносится со своим *потусторонним* как со своей бесконечностью в соответствии с *качественным* моментом противоположности. Но, *во-вторых,* определенное количество находится в непрерывной связи с этим потусторонним; определенное количество и состоит именно в том, что оно есть иное самого себя, что оно внешне самому себе; стало быть, это внешнее так же не есть иное, как и определенное количество; *потустороннее* или бесконечное, следовательно, само есть *определенное количество.* Так потустороннее возвращено из своего бегства, и бесконечное достигнуто. Но так как это потустороннее, ставшее [теперь] посюсторонним, есть опять-таки определенное количество, то [здесь] в свою очередь положена лишь новая граница; граница эта как определенное количество снова убегает от себя самой, выходит как таковое за свои пределы и отталкивается от самой себя в свое небытие, в свое потустороннее, которое в той же мере постоянно становится определенным количеством, в какой и последнее отталкивается от самого себя, чтобы стать потусторонним.

Непрерывный переход определенного количества в свое иное приводит к соединению обоих в таких терминах, как *бесконечно большое* или *бесконечно малое.* Так как в обоих еще имеется определение определенного количества, то они остаются изменчивыми и, стало быть, не достигается та абсолютная определенность, которая была бы некоторым для-себя-бытием. Это *вовне-себя-бытие* определения положено в двояком бесконечном, которое противоположно себе в соответствии с *«больше»* и *«меньше»*, положено в бесконечно большом и бесконечно малом. В каждом из них, взятом само по себе, определенное количество *сохраняется* в постоянной противоположности своему потустороннему. Как бы ни увеличивали то, что́ обладает величиной, оно [в бесконечном] сжимается до незначительности. Поскольку оно соотносится с бесконечным как со своим небытием, то противоположность *качественна;* увеличенное определенное количество поэтому ничего не отвоевало от бесконечного; последнее, как и раньше, есть его небытие. Иначе говоря, увеличение определенного количества не есть *приближение* к бесконечному; ибо различие между определенным количеством и его бесконечностью имеет по своему существу также и тот *момент,* что оно не количественное различие. Бесконечно большое есть лишь более сжатое выражение противоречия: оно должно быть чем-то *большим,* т. е. определенным количеством, и *бесконечным,* т. е. не должно быть определенным количеством. — И точно так же бесконечно малое есть как малое определенное количество и остается поэтому абсолютно, т. е. качественно, слишком большим для бесконечного и противоположно ему. В обоих сохраняется противоречие бесконечного прогресса, который якобы нашел в них свое завершение.

Эту бесконечность, которую упорно определяют как потустороннее конечного, следует назвать *дурной количественной бесконечностью.* Подобно качественной дурной бесконечности она есть постоянный переход от одного члена сохраняющегося противоречия к другому и обратно, от границы к ее небытию и от небытия снова к ней же, к границе. В количественном прогрессе то, к чему совершается переход, есть, правда, не абстрактно иное вообще, а определенное количество, положенное как разное; однако оно также остается противоположным своему отрицанию. Вот почему этот прогресс равным образом есть не продолжение и продвижение, а повторение одного и того же, полагание, снятие, и снова полагание и снова снятие. Это — бессилие отрицания, к которому через само снятие отрицания снова возвращается как непрерывное то, что́ им было снято. Здесь два определения так связаны между собой, что они совершенно убегают друг от друга; и, убегая друг от друга, они не могут отделиться друг от друга, а остаются связанными в своем взаимном убегании.

Примечание 1

[Высокое мнение о бесконечном прогрессе]

Дурная бесконечность главным образом в форме *количественного бесконечного прогресса* — этого постоянного перехода границы, который есть бессилие снять ее и постоянное возвращение в нее, — обычно считается чем-то возвышенным и некоторого рода служением богу, равно как и в философии такой прогресс рассматривался как нечто последнее. Этот прогресс не раз служил поводом для тирад, которыми восхищались как возвышенными произведениями. Но на самом деле эта *модная* возвышенность возвеличивает не самый *предмет*, который скорее ускользает, а только *субъект*, поглощающий в себя столь большие количества. Скудость этого остающегося субъективным восхождения по количественной лестнице сама себя обличает, признавая, что в своем тщетном труде оно не приближается к бесконечной цели, для достижения которой нужно, разумеется, взяться за дело совершенно иначе.

В приводимых нами ниже такого рода тирадах выражено в то же время и то, во что переходит и чем заканчивается такого рода восхождение. Кант, например, приводит как нечто возвышенное следующее (Kr. d. prakt. V. Schl.).

«Когда субъект в мысли возвышается над тем местом, которое он занимает в чувственном мире, и в необозримую даль расширяет связь со звездами и еще более далекими звездами, с мирами и еще более далекими мирами, с системами и еще более отдаленными системами, да и, кроме того, в безграничном времени их периодического движения, их начала и продолжительности, то представление не выдерживает этого движения в неизмеримую даль, где за *самым отдаленным миром все еще* есть *более отдаленный,* где прошлое, *как бы далеко* назад мы ни проследили его, *все еще* имеет *более отдаленное* прошлое, а будущее, *как бы далеко* мы его ни проследили вперед, *все еще* имеет впереди себя другое будущее; *мысль не выдерживает* этого представления о неизмеримом, подобно тому как кончается *падением* или *головокружением* сон, когда человеку снится, что он совершает длинный путь, идет все дальше и дальше, необозримо дальше, и не видать конца» [39].

Это описание помимо того, что оно дает сжатое и вместе с тем богатое изображение содержания возвышения, вызываемого количественным бесконечным прогрессом, заслуживает похвалы особенно за ту правдивость, с которой оно указывает, чем кончается это возвышение: мысль изнемогает, и в итоге — падение и головокружение. Приводит же мысль к изнеможению, вызывает ее падение и головокружение не что иное, как *скука* от повторения, которое заставляет границу исчезать и снова появляться и снова исчезать, и так всегда одно *из-за* другого и одно *в* другом, в потустороннем — посюстороннее, в посюстороннем — потустороннее, постоянно возникать и исчезать, вызывая лишь чувство *бессилия* этого бесконечного или этого долженствования, которое хочет и не может справиться с конечным.

Описание вечности у Галлера, которое Кант назвал *страшным,* обычно вызывает особое восхищение, но часто как раз не за то, в чем состоит подлинная ценность описания. Галлер говорит:

Ich häufe ungeheure Zahlen,
Gebürge Millionen auf,
Ich setze Zeit auf Zeit und Welt auf Welt zu Hauf,
Und wenn ich von der grausen Höh'
Mit Schwindeln wieder nach dir seh',
Ist alle Macht der Zahl, vermehrt zu tausendmalen,
Noch nicht ein Teil von dir.
Ich zieh' sie ab, und du liegst ganz vor mir[90].

Если этому нагромождению чисел и миров придается значение как *описанию вечности,* то упускают из виду, что сам поэт объявляет это так называемое страшное выхождение чем-то тщетным и пустым и что он кончает тем, что лишь *благодаря отказу* от этого пустого бесконечного прогресса *предстает перед ним* и становится *наличным* само истинное бесконечное.

Среди *астрономов* были такие, которые очень охотно похвалялись возвышенностью своей науки, поскольку астрономия имеет дело с *неизмеримым* множеством звезд, с *неизмеримыми* пространствами и временами, в которых расстояния и периоды, уже сами по себе столь огромные, служат единицами и которые, сколь бы многократно их ни брали, все же снова оказываются ничтожно малыми. Пустое удивление, которому они при этом предаются, вздорные надежды, что в загробной жизни они будут перекочевывать с одной звезды на другую и, странствуя так по неизмеримому пространству, будут приобретать все новые и новые сведения *того же рода,* — эти свои пустое удивление и вздорные надежды они выдавали за один из главных моментов превосходства своей науки. А между тем она достойна изумления не из-за такой количественной бесконечности, а, напротив, в силу тех *отношений меры и законов,* которые разум познает в этих предметах и которые составляют разумное бесконечное в противоположность той неразумной бесконечности.

Бесконечности, имеющей отношение к внешнему чувственному созерцанию, Кант противопоставляет другую бесконечность, состоящую в том, что

«индивид обращается к своему незримому «Я» и противопоставляет абсолютную свободу своей воли как некоторое чистое «Я» всем ужасам судьбы и тирании; для него исчезают все окружающие его вещи, начиная с ближайших к нему, и рассыпается в прах то, что́ представляется прочным, миры за мирами, и он, одинокий, познает *себя как равного самому себе»* [91].

«Я» в этом одиночестве с собой есть, правда, достигнутое потустороннее; оно пришло к самому себе, находится *у себя, по сю сторону;* в чистом самосознании абсолютная отрицательность доведена до утверждения и наличия, которое в указанном выхождении за чувственное определенное количество лишь убегает. Но это чистое «Я», фиксируя себя в своей абстрактности и бессодержательности, имеет перед собой противоположное ему наличное бытие вообще, полноту природного и духовного универсума как некое потустороннее. Обнаруживается то же самое противоречие, которое лежит в основе бесконечного прогресса, а именно такое возвращение к себе, которое непосредственно есть в то же время вовне-себя-бытие, соотношение со своим иным как со своим небытием; это соотношение остается некоторой *тоской,* потому что «Я» фиксировало для себя, с одной стороны, свою бессодержательную и лишенную опоры пустоту, а с другой, как свое потустороннее, — полноту, все же остающуюся в отрицании наличной.

К своему изложению той и другой возвышенности Кант присовокупляет замечание, что «удивление (по отношению к первой, внешней) и уважение (ко второй, внутренней возвышенности), хотя и могут *побуждать к* *изысканиям,* но не могут их заменить». — Он, следовательно, объявляет эти взлеты не удовлетворительными для разума, который не может остановиться на них и связанных с ними чувствах и признавать потустороннее и пустое чем-то последним.

Но как нечто последнее бесконечный прогресс брали особенно в его применении к *нравственности.* Только что указанная вторая противоположность между конечным и бесконечным как противоположность между многообразным миром и поднявшимся к своей свободе «Я» носит прежде всего качественный характер. Самоопределение «Я» стремится в то же время к тому, чтобы определить природу и освободить себя от нее; таким образом, оно само через себя соотносится со своим иным, которое как внешнее наличное бытие есть нечто многообразное и тоже количественное. Соотношение с чем-то количественным само становится количественным; отрицательное соотношение «Я» с этим количественным, власть «Я» над «не-Я», над чувственностью и внешней природой, изображается поэтому так, что нравственность может и должна все более *возрастать*, а власть чувственности все более *уменьшаться.* Но полное соответствие воли с моральным законом переносится в идущий до бесконечности прогресс, т. е. изображается как *абсолютно недостижимое* потустороннее, и именно его недостижимость должна быть истинным пристанищем и подлинным утешением; ибо нравственность, говорят, есть борьба, а борьба возможна только при несоответствии воли с законом, и этот закон, следовательно, есть для нее всецело потустороннее.

В этом противоположении «Я» и «не-Я» или чистая воля и моральный закон, [с одной стороны], и природа и чувственность воли — [с другой], предполагаются совершенно самостоятельными и безразличными друг к другу. Чистая воля имеет свой особый закон, находящийся в сущностном соотношении с чувственностью, а природа и чувственность, со своей стороны, имеют законы, о которых нельзя сказать ни то, что они взяты у воли и соответствуют ей, ни даже то, что они хотя и отличаются от нее, все же заключают в себе сущностное соотношение с ней. Эти законы определены вообще сами по себе, они имеются в готовом виде и завершены внутри себя. Но в то же время они оба моменты *одной и той же простой сущности*, «Я»; воля определена как то, что отрицательно по отношению к природе, так что она имеется лишь постольку, поскольку существует нечто от нее отличное, что́ снимается ею, но что́ при снятии соприкасается с ней и даже воздействует на нее. Природе вообще и как чувственности человека — природе как самостоятельной системе законов, — ограничение неким иным безразлично; природа сохраняется в этом состоянии ограничения, вступает самостоятельно в соотношение [с волей] и в такой же мере ограничивает волю, руководящуюся [моральным] законом, в какой она ограничивается ею. — В том же самом акте, в котором воля определяет себя и снимает инобытие некоей природы, это инобытие положено как налично сущее, продолжающее существовать в состоянии своей снятости и, [стало быть], не снято. Заключающееся в этом противоречие не находит своего разрешения в бесконечном прогрессе, а, напротив, обнаруживается и утверждается как неразрешенное и неразрешимое; борьба между нравственностью и чувственностью изображается как в себе и для себя сущее, абсолютное отношение.

Бессилие справиться с качественной противоположностью между конечностью и бесконечностью и постигнуть идею истинной воли, субстанциальную свободу, ищет прибежища в *величине*, чтобы использовать ее как посредницу, так как она есть снятое качественное различие, ставшее безразличным. Однако так как в основе попрежнему лежат оба члена противоположности как качественно различные, то скорее благодаря тому, что они соотносятся как определенные количества, каждое из них сразу же положено безразличным к этому изменению. Природа определяется через «Я», чувственность — через воление добра; изменение, произведенное этим волением в чувственности, есть лишь количественное различие, такое различие, которое оставляет ее тем, что́ она есть.

В более абстрактном изложении кантовской философии или по крайней мере ее принципов, именно в наукоучении Фихте, бесконечный прогресс составляет точно так же основу и результат (das Letzte). За первым основоположением этого изложения, «Я» = «Я», следует второе независимое от первого основоположение, именно *противоположение* «не-Я»; и сразу же принимается, что *соотношение* их есть также *количественное* различие: *отчасти* «не-Я» определяется «Я», *отчасти* им не определяется. Таким образом, «не-Я» продолжает себя, переходя в свое небытие так, что оно в этом своем небытии остается противоположным как нечто неснятое. Поэтому, после того как заключающиеся здесь противоречия были развиты [Фихте] в [его] системе, конечным результатом оказалось то же отношение, которое служило отправным пунктом: «не-Я» остается бесконечным импульсом, абсолютно иным; последним соотношением «не-Я» и «Я» служит бесконечный прогресс, *тоска* и *стремление* — то же противоречие, с которого начали [92].

Так как количество — это определенность, положенная как снятая, то думали, что для единства абсолютного, для единой субстанциальности приобретают многое или, вернее, все, если противоположность вообще низвести до чисто количественного различия. *Всякая противоположность только количественна* — таково было в продолжение некоторого времени основное положение новейшей философии [93]; противоположные определения имеют одну и ту же сущность, одно и то же содержание, они реальные стороны противоположности, поскольку каждая из них имеет внутри себя оба определения противоположности, оба фактора, но только на одной стороне *преобладает* один фактор, а на другой — другой, на одной стороне один из факторов, некая материя или деятельность, имеется в *большем количестве* или в *более сильной степени*, чем на другой. Поскольку здесь предполагаются разные вещества или деятельности, количественное различие скорее подтверждает и завершает их внешность и безразличие друг к другу и к их единству. Различие в *абсолютном* единстве, утверждают, — только количественное; [между тем], хотя количественное — это снятая непосредственная определенность, оно, однако, есть лишь несовершенное, лишь *первое* отрицание, а не бесконечное отрицание, не отрицание отрицания. — Так как бытие и мышление представляют себе [здесь] в виде количественных определений абсолютной субстанции, то и они как определенные количества становятся совершенно внешними друг для друга и не соотносящимися, так же как в низшей сфере углерод, азот и т. д. Только нечто третье, [а именно] внешняя рефлексия, отвлекается от их различия и познает их *внутреннее*, лишь *в-себе-сущее*, а не также *для-себя-сущее*, единство. Стало быть, на самом деле это единство представляют себе лишь как первое *непосредственное* единство или, иначе говоря, только как *бытие*, которое в своем количественном различии *остается* равным себе, но не *полагает* себя равным через само себя; оно, следовательно, не постигнуто как отрицание отрицания, как бесконечное единство. Только в качественной противоположности возникает положенная бесконечность, для-себя-бытие, и само количественное определение переходит, как это сейчас будет выяснено более подробно, в качественное.

Примечание 2

[Кантовская антиномия ограниченности и неограниченности мира во времени и пространстве]

Мы уже упомянули выше, что *кантовские антиномии* — это изложения противоположности конечного и бесконечного в *более конкретном* виде, в применении к более специальным субстратам представления. Рассмотренная там антиномия касалась противоположности между качественной конечностью и бесконечностью. В другой антиномии, а именно в *первой* из четырех космологических антиномий, рассматривается в большей мере количественная граница в ее противоречиях. Я поэтому подвергну здесь исследованию эту антиномию.

Она касается вопроса о том, *ограничен ли или не ограничен мир во времени и пространстве.* — Можно было бы с одинаковым успехом рассматривать эту противоположность и в отношении самих времени и пространства, ибо признаем ли мы, что время и пространство суть отношения самих вещей, или же признаем, что они лишь формы созерцания, — это ничего не меняет по отношению к антиномичности приписываемой им ограниченности или неограниченности.

Более подробный разбор этой антиномии покажет также, что оба положения, а равно и доказательства их, которые, как и рассмотренные выше, ведутся от противного, сводятся не к чему иному, как к двум следующим простым, противоположным утверждениям: *граница существует* и *дóлжно переступать границу.*

Тезис гласит:

«Мир имеет начало во времени и ограничен также в пространстве».

Одна часть доказательства, та, которая касается *времени,* принимает противное:

«Допустим, что мир не имеет начала во времени, тогда до *всякого данного момента времени* протекла вечность и, стало быть, *прошел* бесконечный ряд следующих друг за другом состояний вещей в мире. Но бесконечность ряда именно в том и состоит, что он никогда не может быть *закончен* путем последовательного синтеза. Стало быть, бесконечный прошедший мировой ряд невозможен; значит, начало мира есть необходимое условие его существования, что и требовалось доказать» [94].

Другая часть доказательства, касающаяся *пространства*, сводится к времени. Синтез частей бесконечного в пространстве мира потребовал бы бесконечного времени, которое до́лжно было бы рассматриваться как протекшее, поскольку мир в пространстве следует рассматривать не как нечто становящееся, а как завершенное данное. Но относительно времени показано в первой части доказательства, что невозможно принимать бесконечное протекшее время.

Однако сразу видно, что не было никакой нужды вести доказательство от противного или даже вообще вести доказательство, так как в нем лежит в основе то, что́ должно было быть доказано. А именно, в нем принимается некоторый или любой *данный момент времени*, до которого протекла вечность (вечность имеет здесь лишь ничтожный смысл некоторого дурно-бесконечного времени). Но *данный момент времени* означает не что иное, как некую определенную *границу* во времени. В доказательстве, следовательно, *подразумевается* граница времени как действительная. Но это и есть именно *то*, что́ должно было *быть доказано*. Ведь тезис состоит в том, что мир имеет начало во времени.

[Здесь] имеется лишь та разница, что *допущенная* граница времени есть некоторое «теперь» как конец протекшего до этого времени, а та граница, наличие которой требуется доказать, есть «теперь» как начало некоторого будущего. Но эта разница несущественна. «Теперь» принимается как точка, в которой *прошел* бесконечный ряд следующих друг за другом состояний вещей в мире, следовательно, как конец, как *качественная* граница. Если бы это «теперь» рассматривалось лишь как количественная граница, которая текуча и которую не только до́лжно переступить, но которая скорее и состоит лишь в том, что она переступает самое себя, то оказалось бы, что бесконечный временно́й ряд в ней не *прошел*, а продолжает идти, и рассуждение доказательства отпало бы. Напротив, [в кантовском доказательстве] момент времени принят как качественная граница для прошлого, но в то же время он *начало* для будущего, — ибо *сам по себе* каждый момент времени есть соотношение прошлого и будущего, — он равным образом есть *абсолютное*, т. е. абстрактное *начало* для будущего, т. е. то, что́ должно было быть доказано. Дело отнюдь не меняется от того, что до будущего указанного момента времени и до начала этого будущего имеется уже некоторое прошлое; так как этот момент времени есть качественная граница — а необходимость принимать его за качественную границу вытекает из определения *завершенного*, протекшего, *следовательно, не продолжающегося*, — то время в нем *прервано* и это прошлое оказывается лишенным соотношения с тем временем, которое могло быть названо будущим лишь в отношении этого прошедшего и которое поэтому без такого соотношения есть лишь время вообще, имеющее абсолютное начало. Но если бы оно — как это в самом деле и есть — через «теперь», через данный момент времени находилось в соотношении с прошедшим, если бы оно, следовательно, было определено как будущее, то, с другой стороны, и этот момент времени не был бы границей, бесконечный временно́й ряд продолжался бы в том, что называлось будущим, и не был бы, как это приняло [доказательство], *завершен*.

На самом деле время есть чистое количество; используемый в доказательстве «момент времени», в котором время якобы прерывается, есть скорее лишь *снимающее себя* для-себя-бытие самого «теперь». Доказательство делает лишь одно: утверждаемую тезисом абсолютную границу времени оно представляет как некий *данный момент времени* и прямо принимает, что он завершен, т. е. что он есть абстрактная точка; это — общепринятое определение, которое чувственное представление легко принимает за *границу*, вследствие чего в доказательстве признается как допущение то, что́ до этого было приведено как требующее доказательства.

Антитезис гласит:

«Мир не имеет начала [во времени] и границ в пространстве; он бесконечен и во времени, и в пространстве».

Доказательство антитезиса также исходит из допущения противного:

«Допустим, что мир имеет начало [во времени]. Так как начало есть существование, которому предшествует время, когда вещи не было, то когда-то должно было существовать время, в котором мира не было, т. е. пустое время. Но в пустом времени невозможно *возникновение* какой бы то ни было вещи, так как ни одна часть такого времени в сравнении с другой частью не заключает в себе условия существования, *отличного от условия* несуществования. Поэтому хотя некоторые ряды вещей и могут иметь начало в мире, но сам мир не может иметь начала и, [следовательно], в отношении прошедшего времени бесконечен» [95].

Это доказательство от противного, как и другие, прямо и бездоказательно утверждает то, что́ оно должно было доказать. А именно оно принимает сначала некое потустороннее наличного бытия мира, пустое время, но затем *продолжает* точно так же и *наличное бытие мира*, выводя его *за его пределы в это пустое время*, тем самым снимает это время и, следовательно, *продолжает наличное бытие до бесконечности*. Мир есть некоторое наличное бытие; доказательство *подразумевает*, что это наличное бытие *возникает* и что возникновение имеет *предшествующее* [ему] во времени *условие*. Но сам *антитезис в том* именно и *состоит*, что нет никакого безусловного наличного бытия, никакой абсолютной границы и что наличное бытие мира всегда требует некоторого *предшествующего условия*. Стало быть, то, что́ подлежит доказательству, находится в доказательстве как допущение. — Далее, доказательство ищет затем *условия* в пустом времени, а это означает, что условие принимается как имеющее временно́й характер и, следовательно, как наличное бытие и как нечто ограниченное. Стало быть, вообще принимается, что мир как наличное бытие предполагает другое обусловленное наличное бытие во времени и т. д. до бесконечности.

Доказательство бесконечности мира в *пространстве* таково же. В виде доказательства от противного принимается пространственная конечность мира: «В таком случае он находится в пустом неограниченном пространстве и имел бы некоторое *отношение* к нему; но такое отношение мира к *несуществующему* предмету есть ничто» [96].

И здесь в доказательстве прямо берется в качестве предпосылки то, чтó требуется доказать. [Здесь] прямо принимается, что ограниченный пространственный мир находится в пустом пространстве и имеет к нему некоторое *отношение*, т. е. что, с одной стороны, необходимо *выходить* за пределы этого мира, в пустоту, в потустороннее мира и *небытие* этого мира, но, с другой стороны, этот мир находится в *отношении* с пустым пространством, т. е. имеет в нем *продолжение*, и, следовательно, дóлжно представлять себе потустороннее как наполненное наличное бытие мира. Бесконечность мира в пространстве, провозглашаемая антитезисом, есть не что иное, как, с одной стороны, пустое пространство и, с другой, *отношение* мира к нему, т. е. продолжение мира в нем, наполнение его. Это противоречие — предположение, что пространство одновременно и пусто и наполнено, — есть бесконечный прогресс наличного бытия в пространстве. Само это противоречие, отношение мира к пустому пространству, прямо кладется в основу доказательства.

Поэтому тезис и антитезис и доказательства их не что иное, как противоположные утверждения, что имеется некоторая *граница* и что она вместе с тем лишь *снятая* граница; что граница имеет нечто потустороннее, с чем, однако, она находится в *соотношении* и куда необходимо выходить, переступая ее, но где снова возникает такая граница, которая не есть граница.

Разрешение этих антиномий, как и предыдущих, трансцендентально, т. е. оно состоит в утверждении, что пространство и время как формы созерцания идеальны в том смысле, что мир *в самом себе* не находится в противоречии с собой, не снимает себя; лишь *сознание* в своем созерцании и в соотношении созерцания с рассудком и разумом есть противоречащая самой себе сущность. Это слишком большая нежность по отношению к миру — удалить из него противоречие, перенести, напротив, это противоречие в дух, в разум и оставить его там неразрешенным. В самом же деле дух столь силен, что может переносить противоречие, но он же и умеет разрешать его. Это, однако, вовсе не значит, что так называемый мир (как бы его ни именовали — объективным ли, реальным миром или, согласно трансцендентальному идеализму, субъективным созерцанием и чувственностью, определяемой категориями рассудка) свободен хоть где-нибудь от противоречия, но он не в состоянии выносить его и потому подвержен возникновению и прехождению.

с) Бесконечность определенного количества

1. *Бесконечное определенное количество* как *бесконечно большое* или *бесконечно малое* само есть в себе бесконечный прогресс; оно определенное количество как некоторое большое или малое и в то же время небытие определенного количества. Бесконечно большое и бесконечно малое суть поэтому образы представления, которые при более внимательном рассмотрении оказываются ничтожным туманом и тенью. Но в бесконечном прогрессе это противоречие имеется в ясном виде, и тем самым имеется в ясном виде то, что́ составляет природу определенного количества, которое достигло своей реальности как интенсивная величина и теперь *положено* в своем *наличном бытии* таким, каково оно в своем *понятии*. Это тождество мы теперь и должны рассмотреть.

Определенное количество как градус просто, оно соотнесено с собой и определено как [находящееся] в самом себе. Так как благодаря этой простоте инобытие и определенность сняты в нем, то определенность внешняя ему; оно имеет свою определенность вовне себя. Это его вовне-себя-бытие есть прежде всего *абстрактное небытие* определенного количества вообще, дурная бесконечность. Но это небытие обладает, далее, и некоторой величиной; определенное количество непрерывно переходит в свое небытие, ибо имеет свою определенность как раз в своей внешности; эта его внешность точно так же есть поэтому определенное количество; таким образом, указанное его небытие, бесконечность, ограничивается, т. е. это потустороннее снимается, оно само определено как определенное количество, которое, следовательно, в своем отрицании находится у самого себя.

Но это как раз то, что́ определенное количество, как таковое, есть *в себе*. Ибо оно есть *оно же само* благодаря своему вовне-себя-бытию; внешность составляет то, благодаря чему оно определенное количество, находится у себя. Следовательно, в бесконечном прогрессе *понятие* определенного количества *положено*.

Если мы возьмем бесконечный прогресс сначала в его абстрактных определениях, как они представлены нам, то увидим, что в *нем снято определенное количество, но снято также его потустороннее, имеется, следовательно, и отрицание определенного количества, и отрицание этого отрицания.* Его истина — это их единство, в котором они даны, однако, как моменты. — Это единство есть разрешение противоречия, выражением которого служит бесконечный прогресс; поэтому ближайший смысл единства — *восстановление понятия величины*, заключающегося в том, что она безразличная или внешняя граница. Когда говорят о бесконечном прогрессе, как таковом, то обычно обращают внимание только на то, что каждое определенное количество, как бы оно ни было велико или мало, может исчезать, что должна быть возможность выходить за его пределы, но не на то, что само это его снятие, потустороннее, дурная бесконечность, также исчезает.

Уже *первое* снятие, отрицание качества вообще, благодаря которому полагается определенное количество, есть *в себе* снятие отрицания, — определенное количество есть снятая качественная граница, следовательно, снятое отрицание, — но в то же время оно таково лишь *в себе*; положено же оно как наличное бытие, а затем его отрицание фиксировано как бесконечное, как потустороннее определенного количества, которое остается по сю сторону как нечто *непосредственное*; таким образом, бесконечное определено лишь как *первое* отрицание, и таковым оно выступает в бесконечном прогрессе. Но мы уже показали, что в бесконечном прогрессе имеется нечто большее, имеется отрицание отрицания, или то, чтó бесконечное есть поистине. Ранее мы это рассматривали так, что тем самым восстановлено *понятие* определенного количества; это восстановление означает прежде всего, что его наличное бытие получило свое более точное определение, а именно возникло *определенное количество, определенное в соответствии со своим понятием* и отличное от *непосредственного определенного количества*; *внешность* есть теперь противоположность самой себе, положена как момент самой *величины*, — возникло определенное количество, взятое так, что оно посредством своего небытия, бесконечности, имеет свою *определенность* в другом определенном количестве, т. е. есть *качественно* то, чтó оно есть. Однако это сравнение *понятия* определенного количества с его наличным бытием свойственно больше нашей рефлексии — отношению, которого здесь еще нет. Ближайшее определение таково: определенное количество возвращено к *качеству,* определено отныне качественно. Ибо его особенность, его качество — это внешность, безразличие определенности, и оно теперь положено как то, чтó в своей внешности есть скорее оно же само, соотносится в ней с самим собой, определено в простом единстве с собой, т. е. *качественно.* — Это качественное определено еще более точно, а именно как для-себя-бытие, ибо соотношение с самим собой, к которому оно пришло, появилось из опосредствования, из отрицания отрицания. Определенное количество имеет бесконечность, для-себя-определенность уже не вовне себя, а в самом себе.

Бесконечное, имеющее в бесконечном прогрессе лишь ничтожное значение небытия, недостигнутого, но искомого потустороннего, есть на самом деле не что иное, как *качество.* Определенное количество как безразличная граница переступает само себя в бесконечность; тем самым оно не ищет ничего иного, кроме для-себя-определенности, качественного момента, который, однако, таким образом есть лишь долженствование. Его безразличие к границе, следовательно, отсутствие у него для-себя-сущей определенности и его выхождение за само себя есть то, чтó делает определенное количество определенным количеством; это его выхождение должно подвергнуться отрицанию и найти себе в бесконечном свою абсолютную определенность.

Выражая это в совершенно общем виде, скажем: определенное количество — это само снятое качество; но определенное количество бесконечно, выходит за свои пределы, оно отрицание себя; это его выхождение есть, следовательно, *в себе* отрицание подвергнутого отрицанию качества, восстановление его; и положено именно то, что внешность, выступавшая как потустороннее, определена как *собственный момент* определенного количества.

Определенное количество этим положено как оттолкнутое от себя, вследствие чего, стало быть, имеются два определенных количества, которые, однако, сняты, даны лишь как моменты *одного единства,* и это единство есть определенность определенного количества. — Последнее, *соотнесенное,* таким образом, в своей внешности *с собой* как безразличная граница и, следовательно, положенное качественно, есть *количественное отношение.* — В самом отношении определенное количество внешне себе, отлично от самого себя; эта его внешность есть соотношение одного определенного количества с другим определенным количеством, каждое из которых значимо лишь в этом своем соотношении со своим иным; и это соотношение составляет определенность определенного количества, данного как такое единство. Определенное количество имеет в нем не безразличное, а качественное определение, в этой своей внешности возвратилось в себя, есть в ней то, что́ оно есть.

Примечание 1
Определенность понятия математического бесконечного

Математическое бесконечное интересно, с одной стороны, ввиду расширения [сферы] математики и ввиду великих результатов, достигнутых благодаря введению его в математику; с другой же стороны, оно достойно внимания по той причине, что этой науке еще не удалось посредством понятия (понятия в собственном смысле) обосновать правомерность его применения. Все обоснования зиждутся в конечном счете на *правильности результатов*, получающихся при помощи этого определения, правильности, *доказанной из других оснований*, но не на ясности предмета и действий, благодаря которым достигнуты эти результаты; более того: признается даже, что сами эти действия неправильны.

Это уже само по себе недостаток; такой образ действия ненаучен. Но он влечет за собой еще и тот вред, что математика, не зная природы этого своего орудия из-за того, что не справилась с его метафизикой и критикой, не могла определить сферу его применения и предохранить себя от злоупотребления им.

В философском же отношении математическое бесконечное важно потому, что в его основе действительно лежит понятие истинного бесконечного и оно куда выше, чем обычно называемое так *метафизическое бесконечное*, исходя из которого выдвигаются против него возражения. От этих возражений математическая наука часто умеет спасаться лишь тем, что она отвергает компетенцию метафизики, утверждая, что ей нет дела до этой науки, что ей нечего заботиться о ее понятиях, если только она действует последовательно на своей собственной почве. Она-де должна рассматривать не то, чтó истинно в себе, а то, чтó истинно в ее области. При всех своих возражениях против математического бесконечного матафизика не может отрицать или опровергнуть блестящие результаты, которые дало его применение, а математика не в состоянии точно выяснить метафизику своего собственного понятия, а потому не в состоянии также и дать основание (Ableitung) тех приемов, которые делает необходимыми применение бесконечного.

Если бы над математикой тяготело одно лишь затруднение, причиняемое *понятием* вообще, то она могла бы без околичностей оставить его в стороне, поскольку именно понятие есть нечто большее, чем только указание сущностных определенностей, т. е. рассудочных определений той или иной вещи, а упрекнуть математику в недостаточной *строгости* этих определенностей никак нельзя; [она могла бы оставить в стороне это затруднение], ибо не принадлежит к тем наукам, которые должны иметь дело с понятиями своих предметов и образовать свое содержание через развитие понятия, хотя бы только путем резонерства. Но применяя метод своего бесконечного, она находит *главное противоречие* в самóм *характерном для нее методе*, на котором она вообще основывается как наука. Ибо исчисление бесконечного разрешает и требует таких приемов, которые она должна отвергать, оперируя конечными величинами, и в то же время она обращается со своими бесконечными величинами как с конечными определенными количествами и хочет применять к первым те же приемы, которые применяются к последним. Очень важно для развития этой науки то, что она нашла для *трансцендентных* определений и действий над ними форму обычного исчисления (Kalkuls).

При всей этой противоречивости своих действий математика показывает, что результаты, которые она получает посредством их, вполне совпадают с теми, которые она получает с помощью собственно математического метода, геометрического и аналитического метода. Однако, *с одной стороны*, это касается не всех результатов, и цель введения [математического] бесконечного не только сокращение обычного пути, а достижение результатов, которых последний дать не может. *С другой же стороны, успех* сам по себе не может служить оправданием *харак-*

тера пути (die Manier des Wegs). А этот характер исчисления бесконечного отягощен видимостью *неточности*, которую он сам себе придает, увеличивая конечные величины на бесконечно малую величину и отчасти сохраняя эту последнюю в дальнейших действиях, отчасти же и пренебрегая ею. Этот прием заключает в себе ту странность, что, несмотря на признаваемую неточность, получается результат, который не только *довольно точен* и столь *близок* [к истинному результату], что *можно не обращать внимания* на разницу, но и *совершенно точен*. В самом же *действии*, предшествующем результату, *нельзя обойтись без представления*, что некоторые величины не равны нулю, но они столь *незначительны*, что их можно оставить без внимания. Однако в том, что́ понимают под математической определенностью, совершенно отпадает всякое различие между большей или меньшей точностью, подобно тому как в философии может идти речь не о большей или меньшей вероятности, а единственно лишь об истине. Если метод и применение бесконечного и находят оправдание в успехе, то все же требовать их обоснования не так излишне, как представляется излишним, например, требование доказать право пользоваться собственным носом [97]. Ведь в математическом познании как познании научном существенное значение имеет доказательство, а в отношении получаемых результатов также оказывается, что строго математический метод не для всех их доставляет аргумент успеха, который к тому же есть лишь внешний аргумент.

Стоит рассмотреть более внимательно математическое понятие бесконечного и наиболее замечательные попытки, которые ставят себе целью найти оправдание в пользовании им и устранить затруднение, отягчающее метод. Рассмотрение таких оправданий и определений математического бесконечного, которые я намерен изложить в этом примечании более пространно, бросит в то же время наиболее яркий свет и на самое природу истинного понятия и покажет, как оно представлялось и легло в основу этих попыток.

Обычное определение математического бесконечного гласит, что оно есть *величина, больше которой*, если она определена как бесконечно большая, или *меньше которой*, если она определена как бесконечно малая, *уже нет* или — в другой формулировке — как величина, которая в первом случае больше, а во втором меньше любой другой величины. — В этой дефиниции выражено, конечно, не истинное понятие, а скорее, как уже отмечено, лишь то же противоречие, что и в бесконечном прогрессе. Но посмотрим, что́ содержится в ней *в себе*. Величина определяется в математике как то, что́ может быть увеличено или уменьшено, следовательно, вообще как безразличная граница. И вот, так как бесконечно большое или бесконечно малое есть нечто такое, что́ уже больше не может быть увеличено или уменьшено, то оно на самом деле уже *не определенное количество*, как таковое.

Этот вывод необходим и непосредствен. Но именно это соображение, что определенное количество, — а я называю в этом примечании определенным количеством вообще то, что́ оно есть, [а именно] конечное определенное количество, — снято, обычно не приходит на ум, а между тем оно-то и составляет затруднение для обыденного понимания, так как требуется, чтобы определенное количество, когда оно бесконечно, мыслилось как нечто снятое, как нечто такое, что не есть определенное количество, но *количественная определенность чего все же сохраняется*.

Если обратимся к тому, как относится к этому определению Кант *, то увидим, что он его находит несогласующимся с тем, что́ понимают под *бесконечным целым*. «Согласно обыденному понятию бесконечна та величина, больше которой (т. е. больше определенного *множества* содержащихся в ней данных единиц) невозможна никакая другая величина. Но никакое множество не может быть наибольшим, так как ко всякому множеству можно прибавить еще одну или несколько единиц. Бесконечное целое не дает нам представления о том, *как* оно *велико*, стало быть, понятие его не есть понятие *максимума* (или минимума): посредством него мыслится только его *отношение* к любой полагаемой *единице*, для которой бесконечное целое больше всякого числа. В зависимости от того, взяли ли мы бо́льшую или меньшую единицу, бесконечное было бы бо́льшим или меньшим, но бесконечность, так как она состоит лишь в *отношении* к этой данной единице, оставалась бы одной и той же, хотя, ко-

* В примечании к тезису первой космологической антиномии в «Критике чистого разума».

нечно, абсолютная величина целого вовсе не была бы таким образом познана» [98].

Кант отвергает признание бесконечного целого некоторым максимумом, *завершенным* множеством данных единиц. Максимум или минимум, как таковой, все еще представляется определенным количеством, множеством. Таким представлением не может быть отклонено указанное Кантом заключение, которое приводит к большему или меньшему бесконечному. Вообще, когда бесконечное представляют как определенное количество, для него сохраняет значение различие большего или меньшего. Но эта критика не затрагивает понятия истинного математического бесконечного, бесконечной разности, ибо последняя уже не конечное определенное количество.

Напротив, даваемое Кантом понятие бесконечности, которое он называет истинно трансцендентальным, гласит, что «последовательный *синтез* единицы при измерении определенного количества *никогда* не может быть *закончен*» [99]. В этом понятии подразумевается, как данное, определенное количество вообще; требуется, чтобы оно посредством синтеза *единицы* стало некоторой численностью, определенным количеством, которое следует точно указать, но, [по утверждению Канта], невозможно когда-либо закончить такой синтез. Этим совершенно очевидно выражено не что иное, как бесконечный прогресс, только представляют себе его здесь *трансцендентально*, т. е., собственно говоря, субъективно и психологически. Само по себе, дескать, определенное количество, правда, завершено, но трансцендентальным образом, а именно в *субъекте*, сообщающем ему *отношение* к некоторой единице, возникает лишь такое определение определенного количества, которое не завершено и всецело обременено потусторонним. Следовательно, здесь вообще не идут дальше противоречия, которое содержится в величине, но которое распределено между объектом и субъектом, так что на долю первого выпадает ограниченность, а на долю второго — выхождение за каждую постигаемую им определенность, в дурное бесконечное.

Выше же было сказано, что определение математического бесконечного и притом так, как им пользуются в высшем анализе, соответствует понятию истинного бесконечного; теперь следует сопоставить эти два определения в более развернутом виде. — Что касается прежде всего истинно бесконечного определенного количества, то оно определилось как *в самом себе* бесконечное; оно таково, поскольку, как мы выяснили, и конечное определенное количество или определенное количество вообще, и его потустороннее — дурное бесконечное — *одинаково* сняты. Снятое определенное количество возвратилось тем самым к простоте и к соотношению с самим собой, но не только так, как экстенсивное определенное количество, переходившее в интенсивное определенное количество, которое имеет свою определенность в каком-то внешнем многообразии лишь *в себе*, однако, как полагают, безразлично к этому многообразию и отлично от него. Бесконечное определенное количество скорее содержит, во-первых, внешность и, во-вторых, ее отрицание в самом себе. В этом случае оно уже не конечное определенное количество, не определенность величины, которая имела бы *наличное бытие как определенное количество*, оно нечто простое и потому дано лишь как *момент*; оно определенность величины в *качественной* форме; его бесконечность состоит в том, что оно дано как некоторая *качественная определенность*. — Таким образом, как момент оно находится в сущностном единстве со своим иным, дано лишь как определенное этим своим иным, т.е. оно имеет значение лишь в связи с чем-то находящимся с ним в *отношении*. *Вне этого отношения* оно *нуль*, между тем именно определенное количество, как таковое, безразлично, как полагают, *к отношению*, хотя оно и есть в нем *непосредственное* неподвижное определение. *В отношении* оно только как момент не есть нечто само по себе безразличное; в бесконечности как *для-себя-бытии* оно, будучи в то же время некоторой количественной определенностью, дано лишь как некоторое *«для-одного»*.

Понятие бесконечного, как оно здесь изложено абстрактно, окажется лежащим в основе математического бесконечного, и оно само станет более ясным, когда рассмотрим различные ступени выражения определенного количества *как момента отношения*, начиная с низшей ступени, на которой оно еще есть также определенное количество, как таковое, и кончая высшей, где оно приобретает значение и выражение бесконечной величины в собственном смысле.

Итак, возьмем сначала определенное количество в том *отношении*, в котором оно *дробное число*. Такая дробь, например $\frac{2}{7}$, не есть такое определенное количество, как 1, 2, 3 и т. д.; она, правда, обычное конечное число, однако не непосредственное, как целые числа, а как дробь опосредствованно определенное *двумя другими числами*, которые суть в отношении друг друга численность и единица, причем и единица есть некоторая численность. Но взятые абстрагированно от этого их более точного определения относительно друг друга и рассматриваемые лишь в соответствии с тем, что́ в качественном соотношении, в котором они здесь находятся, происходит с ними как с определенными количествами, 2 и 7 помимо этого соотношения суть безразличные определенные количества; но выступая здесь как *моменты* друг друга и тем самым некоторого третьего (того определенного количества, которое называется показателем), они имеют значение не как 2 и 7, а лишь со стороны их определенности *относительно друг друга*. Поэтому можно вместо них с таким же успехом поставить также 4 и 14 или 6 и 21 и т. д. до бесконечности. Тем самым они, следовательно, начинают приобретать качественный характер. Если бы 2 и 7 имели значение только как определенные количества, то одно было бы просто 2, а другое 7; 4, 14, 6, 21 и т. д. — нечто совершенно иное, чем эти числа, и, поскольку они лишь непосредственные определенные количества, одни из них не могут быть подставлены вместо других. Но поскольку 2 и 7 имеют значение не со стороны той определенности, что они такие определенные количества, их безразличная граница снята; они, стало быть, с этой стороны заключают в себе момент бесконечности, ибо они не только уже не то, что́ они суть, но сохраняется их количественная определенность, однако как в себе сущая качественная определенность, а именно согласно тому, что́ они значат в отношении. Они могут быть заменены бесконечным множеством других чисел, так что определенность отношения не изменяет величину дроби.

Но изображение бесконечности в числовой дроби несовершенно еще и потому, что оба члена дроби, 2 и 7, могут быть изъяты из отношения, и тогда они обыкновенные безразличные определенные количества; их соотношение — то, что они суть члены отношения и моменты,— есть для них нечто внешнее и безразличное. И точно так же само их *соотношение* есть обычное определенное количество, показатель отношения.

Буквы, которыми оперируют в общей арифметике, т. е. ближайшая всеобщность, в которую возводятся числа, не обладают свойством иметь определенную числовую величину; они лишь всеобщие знаки и неопределенные возможности любой определенной величины. Дробь $\frac{a}{b}$ представляется поэтому более подходящим выражением бесконечного, так как a и b, изъятые из их соотношения, остаются неопределенными и не имеют особой им принадлежащей величины, даже будучи отделены друг от друга. — Однако, хотя эти буквы положены как неопределенные величины, их смысл все же состоит в том, что они какое-то конечное определенное количество. Так как *они хотя и всеобщее представление, но лишь об определенном числе,* то для них одинаково безразлично то, что они находятся в отношении, и вне этого отношения они сохраняют то же самое значение.

Если присмотримся еще пристальнее к тому, что́ имеется в отношении, то увидим, что ему присущи оба определения: оно, *во-первых*, определенное количество, но последнее есть, *во-вторых*, не непосредственное определенное количество, а такое, которое содержит качественную противоположность; в то же время оно остается в отношении тем определенным, безразличным квантом благодаря тому, что оно возвращается в себя из своего инобытия, из противоположности и, следовательно, есть также нечто бесконечное. Эти два определения, развитые в их отличии друг от друга, представляются в следующей общеизвестной форме.

Дробь $\frac{2}{7}$ может быть выражена как 0,285714..., $\frac{1}{1-a}$ — как $1 + a + a^2 + a^3$ и т. д. Таким образом, она дана как *бесконечный ряд*; сама дробь называется суммой или *конечным выражением* этого ряда. Если сравним между собой эти два выражения, то окажется, что одно, бесконечный ряд, представляет ее уже не как отношение, а с той стороны, что она определенное количество как *множество* таких количеств, которые присоединяются одно к другому, — как некоторая численность. — Что величины, которые должны составить дробь как некую численность, сами в свою очередь состоят из десятичных дробей, стало быть, сами состоят из отношений, — это не имеет здесь значения; ибо это обстоятельство касается особого рода *единицы* этих величин, а не их, поскольку они конституируют *численность*; ведь и состоящее из нескольких цифр целое число десятеричной системы также считается по своей сути *численностью*, и не обращается внимания на то, что она состоит из *произведений* некоторых чисел на число десять и его степени. Не важно здесь и то, что имеются другие дроби, нежели взятая в качестве примера дробь $\frac{2}{7}$, которые, будучи обращены в десятичные дроби, не дают бесконечного ряда; однако каждая из них может быть изображена как такой ряд в числовой системе другой единицы.

Так как в бесконечном ряде, который должен представлять дробь как численность, исчезает та ее сторона, что она отношение, то исчезает и та сторона, что она, как показано выше, *в самой себе* имеет бесконечность. Но эта бесконечность вошла другим способом, а именно сам ряд бесконечен.

Какова эта бесконечность ряда — это явствует само собой; она дурная бесконечность прогресса. Ряд содержит и представляет следующее противоречие: нечто, будучи отношением и имея внутри себя *качественную* природу, изображается как лишенное отношений, просто как *определенное количество*, как численность. Следствием этого [противоречия] оказывается то, что в численности, выражаемой в ряде, всегда чего-то недостает, так что для того, чтобы достигнуть требуемой определенности, всегда нужно выходить за пределы того, что́ положено. Закон этого продвижения известен; он заключается в определении определенного количества, содержащемся в дроби, и в природе формы, в которой это определение должно быть выражено. Можно, правда, продолжая ряд, сделать численность столь точной, сколь это *нужно*. Однако изображение [численности] посредством ряда всегда остается лишь *долженствованием*; оно обременено неким *потусторонним*, которое не может быть снято, так как попытка выразить в виде *численности* то, что́ основано на *качественной* определенности, есть *постоянное противоречие*.

В этом бесконечном ряде действительно имеется та *неточность*, которая в истинном математическом бесконечном встречается лишь как видимость. Не следует смешивать эти *два вида математического бесконечного*, точно так же как не следует смешивать оба вида философского бесконечного. Для изображения истинного математического бесконечного сначала пользовались *формой ряда*, и в новейшее время она опять была вызвана к жизни. Но она для него не необходима. Напротив, как станет ясно из последующего, бесконечное бесконечного ряда сущностно отличается от истинного математического бесконечного. Скорее он уступает [в этом отношении] даже такому выражению, как дробь.

А именно *бесконечный ряд* содержит дурную бесконечность, так как то, чтó он должен выразить, остается *долженствованием*, а то, чтó он выражает, обременено неисчезающим потусторонним и *отличается* от того, чтó должно быть выражено. Он бесконечен не из-за положенных членов, а потому, что они неполны, потому что иное, сущностно принадлежащее к ним, находится по ту сторону их; то, чтó в нем есть, хотя бы положенных членов было сколь угодно много, есть лишь конечное в собственном смысле этого слова, положенное как конечное, т. е. как такое, что *не есть то, чем оно должно быть*. Напротив, то, чтó называется *конечным выражением* или *суммой* такого ряда, безупречно; оно полностью содержит то значение, которого ряд только ищет; потустороннее возвращено из своего бегства; то, чтó этот ряд есть, и то, чем он должен быть, уже не разделено, а есть одно и то же.

Различает их, если говорить точнее, то, что в бесконечном ряде *отрицательное* находится *вне* его членов, которые имеются налицо, так как они признаются лишь частями *численности*. Напротив, в конечном выражении, которое есть отношение, *отрицательное* имманентно как определяемость сторон отношения *друг другом*, которая есть возвращение в себя, соотносящееся с собой единство как отрицание отрицания (*обе* стороны отношения даны лишь как *моменты*) и, следовательно, *имеет внутри себя* определение бесконечности. — Таким образом, обычно *так называемая сумма*, $\frac{2}{7}$ или $\frac{1}{1-a}$ есть на самом деле *отношение*, и это так называемое *конечное выражение* есть истинно *бесконечное выражение*. Бесконечный *ряд* есть на самом деле скорее *сумма*; его цель — то, чтó в себе есть отношение, представить в форме некоторой суммы, и имеющиеся налицо члены ряда даны не как члены отношения, а как члены агрегата. Он, далее, есть скорее *конечное выражение*, ибо он несовершенный агрегат и остается по своему существу чем-то недостаточным. По тому, что́ в нем имеется, он определенный квант, но в то же время меньший, чем тот, которым он должен быть; и то, чего ему недостает, также есть определенный квант; эта недостающая часть есть на самом деле то, что́ называется в ряде бесконечным только с той формальной стороны, что она есть нечто недостающее, некоторое *небытие*; по своему содержанию она конечное определенное количество. Только то, что́ налично в ряде, совокупно с тем, чего ему недостает, составляет дробь, определенный квант, которым ряд также *должен* быть, но которым он не в состоянии быть. — Слово «бесконечное» также и в сочетании «бесконечный ряд» обычно кажется мнению чем-то возвышенным и величественным; это некоторого рода суеверие, суеверие рассудка. Мы видели, что оно сводится скорее к определению *недостаточности*.

Можно еще заметить, что то, что имеются такие бесконечные ряды, которые не суммируются, — это в отношении формы ряда вообще обстоятельство внешнее и случайное. Ряды эти содержат более высокий вид бесконечности, чем суммирующиеся ряды, а именно несоизмеримость, или, иначе говоря, невозможность представить содержащееся в них количественное отношение как определенное количество, хотя бы в виде дроби. Но свойственная им *форма ряда*, как таковая, содержит то же самое определение дурной бесконечности, какое присуще суммирующемуся ряду.

Только что указанная на примере дроби и ее ряда превратность выражения имеет место и тогда, когда *математическое* бесконечное — а именно не только что названное, а истинное — называют *относительным* бесконечным, обычное же *метафизическое*, под которым разумеют абстрактное, дурное бесконечное, — *абсолютным*. На самом же деле это метафизическое бесконечное скорее лишь относительно, ибо выражаемое им отрицание противоположно границе лишь в том смысле, что граница остается *существовать* вне него и не снимается им; математическое же бесконечное действительно сняло конечную границу внутри себя, так как ее потустороннее соединено с ней.

Спиноза выставляет и поясняет примерами понятие истинной бесконечности в противоположность дурной главным образом в том смысле, в котором мы показали, что так называемая сумма или конечное выражение бесконечного ряда следует рассматривать скорее как бесконечное выражение. Понятие истинной бесконечности будет лучше всего освещено, если я рассмотрю сказанное им об этом предмете непосредственно вслед за только что изложенными соображениями.

Спиноза определяет прежде всего *бесконечное* как *абсолютное утверждение* существования какой-нибудь природы, а конечное, напротив, как *определенность*, как *отрицание*. Абсолютное утверждение некоторого существования следует понимать именно как его соотношение *с самим собой*, означающее, что оно есть не потому, что другое есть; конечное же есть отрицание, есть прекращение как *соотношение* с некоторым иным, начинающимся *вне его*. Абсолютное утверждение некоторого существования, правда, не исчерпывает понятия бесконечности; это понятие подразумевает, что бесконечность есть утверждение не как непосредственное, а только как восстановленное через рефлексию иного в само себя, или, иначе говоря, как отрицание отрицательного. Но у Спинозы субстанция и ее абсолютное единство имеют форму неподвижного единства, т. е. не опосредствующего себя с самим собой, — форму какой-то оцепенелости, в которой еще не находится понятие отрицательного единства самости, субъективность.

В качестве математического примера для пояснения истинного бесконечного (письмо XXIX) [100] Спиноза приводит пространство между двумя неравными кругами, один из которых находится внутри другого, не касаясь его, и которые не концентричны. Этой фигуре и понятию, в качестве примера которого [101] он ею пользуется, он, по-видимому, придавал столь большое значение, что сделал ее эпиграфом своей «Этики» [102]. — «Математики, — говорит он, — умозаключают, что неравенства, возможные в таком пространстве, бесконечны не от бесконечного *множества* частей, ибо *величина* этого пространства *определена* и *ограничена,* и я могу предположить такое пространство бóльшим или меньшим, а они делают этот вывод на том основании, что *природа* этой *вещи* превосходит всякую определенность» [103]. — Как видим, Спиноза отвергает представление о бесконечном как о множестве или как о незавершенном ряде и напоминает, что в пространстве, приводимом им в качестве примера, бесконечное не находится по ту сторону, а налично и полно; это пространство есть нечто ограниченное, но именно потому бесконечное, «что природа вещи превосходит всякую определенность», так как содержащееся в нем определение величины в то же время не может быть представлено как определенное количество или, употребляя приведенное выше выражение Канта, *синтезирование* не может быть завершено, доведено до некоторого — дискретного — определенного количества. — Каким образом противоположность между *непрерывным* и *дискретным* определенным количеством приводит к бесконечному, — это мы разъясним в одном из следующих примечаний. — Бесконечное ряда Спиноза называет *бесконечным воображения*, бесконечное же как соотношение с самим собой — *бесконечным мышления* или infinitum actu [актуально бесконечным]. Оно именно actu, *действительно* бесконечно, так как оно внутри себя завершено и налично. Так, ряд 0,285714... или $1+a+a^2+a^3$... есть лишь бесконечное воображения или мнения, ибо он не обладает действительностью, ему безусловно чего-то недостает. Напротив, $\frac{2}{7}$ или $\frac{1}{1-a}$ есть *в действительности* не только то, чтó ряд представляет собой в своих наличных членах, но к тому же еще и то, чего ему недостает, чем он только *должен быть*. $\frac{2}{7}$ или $\frac{1}{1-a}$ есть такая же конечная величина, как заключенное между двумя кругами пространство и его неравенства в примере Спинозы, и, подобно этому пространству, может быть увеличена или уменьшена. Но отсюда не получается нелепость большего или меньшего бесконечного, ведь это определенное количество целого не касается отношения его моментов, *природы вещи*, т. е. качественного определения величины; то, чтó в бесконечном ряде *имеется налицо*, есть также конечное определенное количество, но кроме того еще нечто недостающее. — Напротив, *воображение* не идет дальше определенного количества, как такового, и не принимает во внимание качественного соотношения, составляющего основу имеющейся несоизмеримости.

Несоизмеримость, имеющая место в примере, приводимом Спинозой, заключает в себе вообще криволинейные функции и приводит к тому бесконечному, которое ввела математика при действиях с такими функциями и вообще при действиях *с функциями переменных величин*; это бесконечное есть *истинно математическое,* качественное бесконечное, которое мыслил себе и Спиноза. Это определение мы должны здесь рассмотреть подробнее.

Что касается, во-первых, признаваемой столь важной категории *переменности,* под которую подводятся соотносимые в этих функциях величины, то они прежде всего переменны не в том смысле, в каком в дроби $\frac{2}{7}$ переменны оба числа 2 и 7, поскольку вместо них можно поставить также 4 и 14, 6 и 21 и т. д. до бесконечности без изменения значения дроби. В этом смысле можно с еще бóльшим правом в дроби $\frac{a}{b}$ поставить вместо a и b любые числа, не изменяя того, чтó должно выражать $\frac{a}{b}$. Лишь в том смысле, что и вместо x и y в той или иной функции можно поставить бесконечное, т. е. неисчерпаемое *множество* чисел, a и b суть такие же переменные величины, как и x и y. Поэтому выражение *переменные величины* страдает неясностью и неудачно выбрано для определений величин, интерес которых и способ действий над которыми коренятся в *чем-то совершенно другом*, чем только в их переменности.

Чтобы выяснить, в чем заключается истинное определение тех моментов функции, которыми занимается высший анализ, мы снова должны вкратце обозреть отмеченные выше ступени. В дробях $\frac{2}{7}$ или $\frac{a}{b}$ числа 2 и 7, каждое само по себе, суть определенные кванты и соотношение для них несущественно; a и b равным образом должны представлять такие определенные количества, которые и вне отношения остаются тем, чтó они есть. Далее, $\frac{2}{7}$ и $\frac{a}{b}$ суть также постоянное определенное количество, некоторое частное; отношение составляет некую численность, единицей которой служит знаменатель, а численностью этих единиц — числитель, или наоборот. Если бы мы подставили вместо 2 и 7 — 4 и 14 и т. д., то отношение осталось бы тем же самым и как определенное количество. Но это в корне изменяется, например, в функции $\frac{y^2}{x} = p$; здесь, правда, x и y имеют [и тот] смысл, что могут быть определенными количествами; но определенное частное имеют не x и y, а лишь x и y^2. Поэтому указанные *стороны* отношения, x и y, *во-первых*, не только не определенные количества, но и, *во-вторых*, их *отношение* не постоянное определенное количество (а также не *имеется в виду* такое определенное количество, как это, например, имеет место при a и b), не постоянное частное, а это частное *как определенное количество* совершенно *переменно*. Но это следует только из того, что x находится в отношении не к y, а к *квадрату* y. Отношение величины к *степени* есть не *определенное количество*, а *качественное* по своему существу отношение. *Степеннóе отношение* есть *то обстоятельство*, которое должно рассматриваться как *основное определение*. — В функции же прямой линии $y = ax$ $\frac{y}{x} = a$ есть обычная дробь и частное; эта функция есть поэтому лишь *формально* функция переменных величин или, иначе говоря, x и y здесь то же самое, чтó a и b в $\frac{a}{b}$, они не имеют того определения, сообразно с которым их рассматривает дифференциальное и интегральное исчисление. — Ввиду *особенной* природы переменных величин в этом способе рассмотрения было бы целесообразно ввести для них и особое название, и *обозначения*, отличные от обычных обозначений *неизвестных величин* в каждом конечном, определенном или неопределенном уравнении, — по причине их существенного отличия от таких просто неизвестных величин, которые в себе суть вполне определенные количества или определенная совокупность определенных квантов. — И в самом деле, лишь отсутствие сознания особенности того, чтó составляет интерес высшего анализа и чем вызваны потребность в дифференциальном исчислении и изобретение его, само по себе привело к включению функций первой степени, каково уравнение прямой линии, в состав этого исчисления; вызван такой формализм ошибочным мнением, будто правильное в себе требование *обобщения* какого-нибудь метода можно выполнить, опуская ту *специфическую* определенность, на которую опирается потребность в этом методе, так что считается, будто в рассматриваемой нами области дело идет только о *переменных величинах вообще.* От значительной доли формализма в рассмотрении этих предметов и в их трактовке можно было бы, конечно, избавиться, если бы поняли, что дифференциальное исчисление касается не переменных величин, как таковых, а *степенны́х определений.*

Но имеется еще дальнейшая ступень, на которой математическое бесконечное обнаруживает свою специфику. В уравнении, в котором x и y положены прежде всего как определенные некоторым степенны́м отношением, x и y, как таковые, должны еще означать определенные количества; и вот это значение совершенно утрачивается в так называемых *бесконечно малых разностях.* dx, dy уже не определенные количества и не должны иметь значение таковых, а имеют значение лишь в своем соотношении, *имеют смысл только как моменты.* Они уже не *нечто,* если принимать нечто за определенное количество, они не конечные разности; но они и *не ничто,* не нуль, лишенный определения. Вне своего отношения они чистые нули, но их следует брать только как моменты отношения, как *определения* дифференциального коэффициента $\frac{dx}{dy}$.

В этом понятии бесконечного определенное количество поистине завершено в некоторое качественное наличное бытие; оно положено как действительно бесконечное; оно снято не только как то или иное определенное количество, а как определенное количество вообще. Но [при этом] *сохраняется количественная определенность* как *элемент* определенных количеств, как принцип или, как еще говорили, она сохраняется *в своем первом понятии.*

Против этого понятия и направлены все те нападки, которым подверглось основное данное математикой определение этого бесконечного — дифференциального и интегрального исчисления. Неправильные представления самих математиков привели к непризнанию этого понятия; но виновна в этих нападках главным образом неспособность обосновать этот предмет как *понятие.* Однако понятие, как было указано выше, математика не может здесь обойти, ибо как математика бесконечного она не ограничивается рассмотрением *конечной* определенности своих предметов (как, например, в чистой математике пространство и число и их определения рассматриваются и соотносятся друг с другом лишь со стороны их конечности), а приводит заимствованное оттуда и трактуемое ею определение *в тождество с его противоположностью*, превращая, например, кривую линию в прямую, круг — в многоугольник и т. д. Поэтому действия, к которым она позволяет себе прибегать в дифференциальном и интегральном исчислении, находятся в полном противоречии с природой чисто конечных определений и их соотношений и, стало быть, могли бы найти свое обоснование только в *понятии*.

Если математика бесконечного настаивала на том, что эти количественные определения суть исчезающие величины, т. е. такие, которые уже не определенные количества, но и не ничто, а сохраняют еще некоторую *определенность относительно другого*, то [нападавшим на нее] казалось совершенно ясным, что нет, как они выражались, никакого *среднего состояния* между бытием и ничто. — Каково значение этого возражения и так называемого среднего состояния, это уже было показано выше при рассмотрении категории становления (примечание 4). Конечно, единство бытия и ничто не есть *состояние*; состояние было бы таким определением бытия и ничто, в которое эти моменты, так сказать, попали только случайно, как бы впав в болезнь или подвергшись внешнему воздействию со стороны ошибочного мышления; скорее лишь эта средина и это единство, исчезание, или, что то же, становление, и есть их *истина*.

То, чтó бесконечно, говорили далее, не *подлежит сравнению* как большее или меньшее; поэтому не может быть отношения бесконечного к бесконечному по разрядам или рангам бесконечного, а между тем такие различия бесконечных разностей встречаются в науке, трактующей о них. — Это уже упомянутое выше возражение все еще исходит из представления, будто здесь идет речь об *определенных количествах*, сравниваемых как определенные количества, и что определения, которые уже не определенные количества, не имеют больше никакого отношения друг к другу. В действительности же дело обстоит наоборот: то, чтó *только* находится в отношении, не есть определенное количество. Определенное количество есть такое определение, которое вне своего отношения должно иметь совершенно безразличное [к другим] наличное бытие и которому должно быть безразлично его отличие от иного, между тем как качественное есть лишь то, что оно есть в своем отличии от иного. Поэтому указанные бесконечные величины не только сравнимы, но существуют лишь как моменты сравнения, отношения.

Я приведу важнейшие определения, которые были даны в математике относительно этого бесконечного; тогда станет ясно, что они исходят из мысли о самом предмете, согласующейся с развитым здесь понятием, но что их авторы не исследовали этой мысли как понятие, и в применении они вынуждены были прибегать к уловкам, противоречащим тому, чего они хотели добиться.

Эту мысль нельзя определить более правильно, чем это сделал Ньютон. Я оставлю здесь в стороне определения, принадлежащие представлению о движении и скорости (от которых он главным образом и заимствовал название *флюксий)*, так как в них мысль выступает не в надлежащей абстрактности, а конкретно, смешанно с несущественными формами. Эти флюксии объясняются Ньютоном таким образом (Princ. mathem. phil. nat. L. 1. Lemma XI. Schol.) [104], что он понимает под ними не *неделимые* — форма, которой пользовались до него математики Кавальери [105] и другие и которая содержит понятие *определенного в себе* кванта, — а *исчезающие делимые*. Он понимает под ними, кроме того, не суммы и отношения определенных частей, а *пределы* (limites) *сумм* и *отношений*. Против этого, говорит Ньютон, выдвигают возражение, что у исчезающих величин не может быть никакого *последнего отношения*, так как прежде чем они исчезли, оно не последнее, а когда они исчезли, нет уже никакого отношения. Но под отношением исчезающих величин следует понимать не то отношение, которое имеет место *до* или *после* их исчезновения, а то отношение, *вместе с которым* они исчезают (quacum evanescunt). Точно так же и *первое* отношение возникающих величин есть отношение, *вместе с которым* они возникают.

В соответствии с состоянием научного метода того времени давалось лишь объяснение, что под таким-то термином следует понимать то-то. Но объяснение, что под таким-то термином следует понимать то-то, есть, собственно говоря, лишь субъективное предложение или же историческое требование, причем не показывают, что такое понятие в себе и для себя необходимо и обладает внутренней истинностью. Но из сказанного видно, что выставленное Ньютоном понятие соответствует тому, чем оказалась в приведенном выше изложении бесконечная величина на основании рефлексии определенного количества внутрь себя. [Под флюксиями Ньютон] понимает величины в их исчезновении, т. е. величины, которые уже не определенные количества; он понимает под ними, кроме того, не отношения определенных частей, а *пределы отношения*. Следовательно, исчезают, согласно этому пониманию, и определенные количества сами по себе, члены отношения, и само отношение, поскольку оно было определенным количеством; предел отношения величин — это то, в чем оно есть и не есть; это означает, точнее, что он есть то, в чем определенное количество исчезло, и тем самым сохранились отношение только как качественное отношение количества и его члены — также как качественные моменты количества. — Ньютон к этому прибавляет, что из того обстоятельства, что имеются последние отношения исчезающих величин, не следует заключать, что имеются последние величины, *неделимые*. Это было бы опять-таки отходом от абстрактного отношения к таким его членам, которые должны были бы сами по себе, вне своего соотношения, иметь значение как неделимые, как нечто, что было бы «одним», безотносительным.

Чтобы предостеречь против этого недоразумения, он, кроме того, напоминает, что *последние отношения* — это не отношения *последних величин*, а только пределы, к которым *отношения* беспредельно убывающих величин ближе, чем всякое *данное*, т. е. конечное различие, за которые, однако, они не выходят, чтобы не стать ничем. — Под *последними величинами* можно было бы, как сказано, понимать именно неделимые, или «одни». Но из определения последнего отношения устранено представление и о безразличном, безотносительном «одном», и о конечном определенном количестве. — Но не нужно было бы ни *беспредельного убывания*, которое Ньютон приписывает определенному количеству и которое лишь служит выражением бесконечного прогресса, ни определения делимости, которое уже не имеет здесь никакого прямого значения, если бы требуемое определение было развито в понятие такого определения величины, которое есть исключительно лишь момент отношения.

Что касается *сохранения отношения* при *исчезновении определенных количеств*, то мы встречаем (у других авторов, например у Карно[106], Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal) выражение, что *в силу закона непрерывности* исчезающие величины, прежде чем исчезнуть, еще сохраняют то отношение, из которого они происходят. — Это представление *выражает* истинную природу вещей, поскольку здесь подразумевается не непрерывность определенного количества, которой оно обладает в бесконечном прогрессе, непрерывность, выражающаяся в том, что определенное количество так продолжает себя в своем исчезновении, что *по ту сторону* его снова возникает лишь конечное определенное количество, *новый член ряда*. Однако *непрерывное* движение вперед всегда представляют так, что проходят имеющие еще значение конечные определенные количества. В совершающемся же переходе в истинное бесконечное *непрерывным* оказывается отношение; оно настолько *непрерывно* и сохраняется, что переход состоит скорее лишь в том, что он выделяет отношение в чистом виде и приводит к исчезновению безотносительного определения, т. е. что определенное количество, будучи стороной отношения, есть определенное количество еще и тогда, когда оно положено вне этого соотношения. — Такое очищение количественного отношения есть в этом смысле не что иное, как *постижение* эмпирического наличного бытия через *понятие* (begriffen wird). Этим эмпирическое наличное бытие настолько возвышается над собой, что его понятие содержит *те же определения*, что оно само, но схваченные в их сущностности и выраженные в *единстве* понятия, в котором они лишились своего безразличного, чуждого понятия существования (Bestehen).

Столь же интересна и другая форма, в какой Ньютон трактует разбираемые нами величины, а именно трактовка их как *производящих величин* или *начал*. *Произведенная величина* (genita) — это произведение или частное, корни, прямоугольники, квадраты, а также стороны прямоугольников, квадратов, вообще *конечная величина*. — «Рассматривая ее как переменную, как она возрастает или убывает в постоянном движении и течении, я понимаю под названием *моментов* ее *мгновенные приращения* или *убывания*. Но не следует принимать эти моменты за частицы, имеющие определенную величину (particulae finitae). Такие частицы суть не самые *моменты*, а величины, *произведенные* из моментов; под последними следует понимать скорее находящиеся в становлении *принципы,* или начала, конечных величин» [107]. — Ньютон отличает здесь определенное количество от него же, рассматривает, каково оно как продукт или налично сущее и каково оно в своем *становлении,* в своем *начале* и *принципе,* т. е. каково оно в своем *понятии* или — здесь это то же самое — в своем качественном определении; в качественном определении количественные различия, бесконечные приращения или убывания суть лишь моменты; только ставшее есть то, что́ перешло в безразличие наличного бытия и во внешность, — определенное количество. — Но если философия истинного понятия [бесконечного] должна признать эти определения бесконечного, приведенные относительно приращений или убываний, то сразу же следует заметить, что самые формы приращения и т. д. находятся *внутри* категории непосредственного определенного количества и указанного выше непрерывного движения вперед и что представления о *приращении, приросте,* умножении x на dx или i и т. д. должны рассматриваться скорее как основное зло этих методов, как постоянное препятствие к возвышению от представления об обычном определенном количестве к чистому определению качественного момента количества.

Против указанных определений очень отстало *представление о бесконечно малых величинах,* связанное с [представлением о] самом приращении или убывании. Согласно этому представлению, бесконечно малые величины таковы, что можно *пренебрегать* не только ими самими при сравнении с конечными величинами, но также их высшими разрядами при сравнении с низшими, а равно и произведениями нескольких таких величин при сравнении с одной. — У Лейбница особенно подчеркивается требование такого *пренебрежения,* которому отдали дань и предшествующие изобретатели методов, касавшихся этих величин. Прежде всего именно это пренебрежение придает указанному исчислению, несмотря на то, что оно удобно, видимость неточности и явной неправильности способа его действий. — Вольф старался объяснить это пренебрежение [величинами], следуя своей манере делать общедоступными рассматриваемые им вопросы, т. е. лишать понятие чистоты и подменять его неправильными чувственными представлениями. А именно он сравнивает пренебрежение бесконечно малыми разностями высших разрядов относительно низших с образом действия геометра, при котором измерение высоты горы нисколько не делается менее точным, если ветер сдунет песчинку с ее вершины или если не будет принята во внимание высота домов и башен при вычислении лунных затмений (Element. mathes. univ. Tom I. El. analys. math. P. II. C. I. S. schol.).

Если снисходительность здравого смысла дозволяет такую неточность, то все геометры, напротив, отвергали такого рода представление. Сама собой напрашивается мысль, что в математической науке идет речь вовсе не о такой эмпирической точности и что математическое измерение посредством ли вычислений или посредством геометрических построений и доказательств совершенно отлично от измерения земли, от измерения эмпирических линий, фигур и т. п. Да и помимо того, как уже было указано выше, аналитики, сравнивая результаты, получаемые строго геометрическим путем, с результатами, получаемыми методом бесконечно малых разностей, доказывают, что они одинаковы и что бóльшая или меньшая точность [здесь] вовсе не имеет места. А ведь само собой разумеется, что абсолютно точный результат не мог бы получиться при неточном способе действия. Однако, с другой стороны, *сам способ действия*, несмотря на протесты против приведенных в оправдание доводов, не может обойтись без пренебрежения [величиной] на том основании, что она незначительна. И в этом состоит трудность, побуждающая аналитиков объяснить заключающуюся здесь бессмыслицу и устранить ее.

По этому вопросу следует прежде всего привести мнение Эйлера[108]. Исходя из общего определения Ньютона, он твердо убежден, что дифференциальное исчисление рассматривает *отношения приращений* величины, но что *бесконечно малую разность*, как таковую, следует рассматривать как *нуль* (Institut. calc. different., p. I. c. III). — Как это надо понимать, видно из изложенного выше; бесконечно малая разность есть нуль лишь как определенное количество, а не качественный нуль; а как нуль по количеству она скорее чистый момент лишь отношения. Она не различие *на некоторую величину*. Но именно поэтому, с одной стороны, вообще ошибочно называть моменты, именуемые бесконечно малыми величинами, также и приращениями или убываниями и *разностями*. Это определение исходит из того, что к имеющейся сначала конечной величине что-то *прибавляется* или что-то от нее *отнимается*, что производится некоторое вычитание или сложение, некоторое *арифметическое, внешнее* действие. Но что касается перехода от функции переменной величины к ее дифференциалу, то по нему видно, что он совершенно другого характера, а именно, как уже было разъяснено, он должен рассматриваться как сведéние конечной функции к качественному отношению ее количественных определений. — С другой стороны, сразу бросается в глаза ошибочность утверждения, будто приращения сами по себе — это нули и будто рассматриваются только их отношения; ведь нуль вообще уже не имеет никакой определенности. Это представление, стало быть, хотя и доходит до отрицательности определенного количества и определенно выражает эту отрицательность, однако в то же время не схватывает ее в ее положительном значении качественных определений количества, которые, если хотят вырвать их из отношения и брать их как определенные количества, окажутся лишь нулями. — Лагранж[109] (Théorie des fonct. analyt. Introd.) замечает относительно представления о *пределах* или *последних отношениях*, что, хотя и можно очень хорошо представить себе отношение двух величин, пока они остаются конечными, это отношение не дает рассудку ясного и определенного понятия, как только его члены становятся одновременно нулями. — И в самом деле, рассудок должен выйти за пределы той чистой отрицательности, что как определенные количества члены отношения суть нули, и понять их положительно как качественные моменты. — А то, что́ Эйлер (в указанном месте § 84 и сл.) прибавляет еще относительно данного [им] определения, чтобы показать, что две так называемые бесконечно малые величины, которые якобы не что иное, как нули, тем не менее находятся в отношении друг к другу, и потому для их обозначения пользуются не знаком нуля, а другими знаками, — нельзя признать удовлетворительным. Он хочет это обосновать различием между арифметическим и геометрическим отношениями: в первом мы обращаем внимание на разность, во втором — на частное, и, хотя арифметическое отношение между двумя нулями [всегда] одинаково, это не значит, что точно так же обстоит дело с геометрическим отношением; если $2:1=0:0$, то по природе пропорции, так как первый член вдвое больше второго, третий член тоже должен быть вдвое больше четвертого; поэтому на основании этой пропорции отношение $0:0$ должно быть взято как отношение $2:1$. — Также и по обычной арифметике $n \times 0 = 0$; следовательно, $n:1 = 0:0$. — Однако именно потому, что $2:1$ или $n:1$ есть отношение определенных количеств, ему не соответствует ни отношение, ни обозначение $0:0$.

Я не буду приводить мнения еще других [математиков], так как рассмотренные уже достаточно показали, что в них, правда, содержится истинное понятие бесконечного, но что оно не выделено и не сформулировано во всей своей определенности. Поэтому, когда [высказывающие эти взгляды] переходят к самому действию, то на нем не может сказаться истинное определение понятия; скорее возвращается конечная определенность количества, и действие не может обойтись без представления о лишь *относительно малом*. Исчисление делает необходимым подвергать так называемые бесконечные величины обычным арифметическим действиям сложения и т. д., основанным на природе конечных величин, и тем самым хотя бы на мгновение признавать эти бесконечные величины конечными и трактовать их как таковые. Исчисление должно было бы обосновать правомерность того, что оно, с одной стороны, низводит эти величины, вовлекает их в эту сферу и трактует их как приращения или разности, а с другой — пренебрегает ими как определенными количествами после того, как оно только что применяло к ним формы и законы конечных величин.

Я коснусь еще самого существенного в попытках геометров устранить эти затруднения.

Более ранние аналитики меньше терзали себя такими сомнениями; но старания новейших аналитиков были направлены главным образом на то, чтобы вновь привести исчисление бесконечно малых к очевидности *собственно геометрического метода* и с помощью этого метода достигнуть в математике *строгости доказательств древних* (выражения Лагранжа). Однако так как принцип анализа бесконечного по своей природе выше, чем принцип математики конечных величин, то анализ бесконечного сразу же сам собой должен был отказаться от этого рода *очевидности,* подобно тому как философия также не может притязать на ту отчетливость, которая присуща наукам о чувственном, например естественной истории, или подобно тому как еда и питье считаются более понятным занятием, чем мышление и постижение посредством понятия (Begreifen). Поэтому нам придется говорить лишь о стараниях достигнуть строгости доказательств древних.

Некоторые [аналитики] пытались обойтись совершенно без понятия бесконечного и дать без него то, что́ казалось связанным с его применением. — Лагранж, например, рассказывает о методе, изобретенном Ланденом[110], и говорит об этом методе, что он чисто аналитический и не пользуется бесконечно малыми разностями, а сначала вводит *различные значения* переменных величин и в дальнейшем *приравнивает* их друг к другу. Лагранж, впрочем, заявляет, что при этом утрачиваются свойственные дифференциальному исчислению преимущества, а именно простота метода и легкость действий. — Это способ, в котором заключается нечто соответствующее тому, из которого исходит Декартов метод касательных (о нем нам придется ниже еще говорить подробнее). Здесь можем заметить, что в общем сразу ясно, что этот способ придавать переменным величинам различные значения и затем приравнивать их друг к другу вообще относится к иному кругу математического рассмотрения, чем сам метод дифференциального исчисления, и им не выделяется подлежащая в дальнейшем более тщательному рассмотрению особенность того простого отношения, к которому сводится действительное, конкретное определение этого исчисления, а именно отношения производной функции к первоначальной.

Более ранние из математиков новейшего времени, как, например, Ферма, Барроу[111] и другие, которые первые пользовались бесконечно малыми в том применении, которое позднее преобразовалось в дифференциальное и интегральное исчисление, а затем также Лейбниц и последующие математики, равно как и Эйлер, всегда откровенно заявляли, что они вправе отбрасывать произведения бесконечно малых разностей, так же как и их высшие степени, только на том основании, что они *относительно,* по сравнению с низшими разрядами, *исчезают.* Единственно на этом соображении покоится у них *основное положение,* а именно определение того, что́ такое дифференциал произведения или степени, *ибо к этому сводится все теоретическое учение.* Остальное есть отчасти механизм действий, отчасти же применение, которое, однако, как мы покажем далее, на самом деле представляет больший, или, лучше сказать, единственный интерес. — Что касается рассматриваемого теперь вопроса, то следует здесь привести лишь самое простое соображение: исходя из того же довода относительно *незначительности* принимают как основное положение о кривых, что элементы кривых, а именно *приращения* абсциссы и ординаты имеют между собой то же *отношение,* что и *подкасательная* и *ордината.* С целью получить подобные треугольники дуга, составляющая наряду с двумя приращениями третью сторону треугольника, который прежде справедливо назывался *характеристическим* треугольником, рассматривается как прямая линия, как часть касательной, и потому одно из приращений — как доходящее до касательной. Эти допущения возвышают, с одной стороны, указанные ранее определения над природой конечных величин; с другой же стороны, к моментам, называемым теперь бесконечными, [здесь] употребляется такой способ, который приложим лишь к конечным величинам и применяя который мы не вправе чем-либо пренебрегать, ссылаясь на незначительность. Затруднение, отягчающее метод, остается при таком способе действия во всей своей силе.

Здесь мы должны указать на удивительный прием Ньютона (Princ. math. phil. nat. Lib. II. Lemma II, после propos. VII) — на изобретенную им остроумную уловку для устранения арифметически неправильного отбрасывания произведений бесконечно малых разностей или их высших разрядов при нахождении дифференциалов. Он находит дифференциал произведения, из которого легко затем вывести дифференциалы частного, степени и т. п., следующим образом. Произведение, если уменьшить x и y, каждый порознь *на половину* его бесконечной разности, переходит в $xy - \frac{xdy}{2} - \frac{ydx}{2} + \frac{dxdy}{4}$; а если увеличить x и y ровно настолько же, то произведение переходит в $xy + \frac{xdy}{2} + \frac{ydx}{2} + \frac{dxdy}{4}$. Если от этого второго произведения отнять первое, то получается разность

$ydx + xdy$, которая есть *избыток приращения на целые* dx и dy, так как именно этим приращением отличаются оба произведения; следовательно, это и есть дифференциал xy. — Как видим, при этом способе сам собой отпадает член [ряда], составляющий главное затруднение, — произведение обеих бесконечных разностей $dxdy$. Однако при всем уважении к имени Ньютона следует сказать, что это, хотя и весьма элементарное, действие неправильно; неправильно, что $\left(x+\frac{dx}{2}\right)\left(y+\frac{dy}{2}\right)-\left(x-\frac{dx}{2}\right)\left(y-\frac{dy}{2}\right)=(x+dx)(y+dy)-xy$. Только потребность обосновать ввиду его важности исчисление флюксий могла заставить такого математика, как Ньютон, обмануть себя подобным способом доказательства.

Другие формы, которыми пользуется Ньютон при выведении дифференциала, связаны с конкретными, относящимися к движению значениями элементов и их степеней. — Применение *формы ряда*, вообще характерное для его метода, сразу наводит на мысль, что всегда в наших силах путем прибавления все новых членов взять величину *с той степенью точности, которая нам нужна,* и что отброшенные величины *относительно незначительны,* что вообще результат есть лишь *приближение;* и Ньютон здесь также удовлетворился этим доводом, подобно тому как он в своем методе решения уравнений высших степеней путем приближения отбрасывает высшие степени, получающиеся при подстановке в данное уравнение каждого найденного еще неточного значения, на том простом основании, что они малы; см. *Lagrange.* Équations numériques, p. 125.

Ошибка, которую допустил Ньютон, решая задачу путем отбрасывания существенных высших степеней, ошибка, которая дала повод противникам торжествовать победу своего метода над его методом и истинный источник которой указывает Лагранж в своем новейшем исследовании ее (Théorie des. fonct. analyt. 3me p. Ch. III), доказывает, что пользование этим орудием еще страдало *формализмом* и *неуверенностью.* Лагранж показывает, что Ньютон допустил эту ошибку потому, что он пренебрег членом ряда, содержащим важную для данной задачи степень. Ньютон придерживался указанного выше формального, поверхностного принципа отбрасывания членов [ряда] ввиду их относительной малости. — А именно известно, что в *механике* членам ряда, в котором разлагается функция какого-нибудь движения, придается *определенное значение*, так что первый член или первая функция соотносится с моментом скорости, вторая — с силой ускорения, а третья — с сопротивлением сил. Поэтому члены ряда должны рассматриваться здесь не только как *части* некоторой суммы, но как *качественные моменты некоторого понятия как целого*. Благодаря этому *отбрасывание* остальных членов, принадлежащих к дурно бесконечному ряду, имеет *смысл*, совершенно *отличный* от отбрасывания их на основании их *относительной малости* *. Решение задачи, данное Ньютоном, оказалось

---

* Обе точки зрения весьма просто сопоставлены у Лагранжа при применении теории функций к механике в главе о прямолинейном движении (Théorie des fonct. 3me p., ch. I, art. IV). Пройденное пространство, рассматриваемое как функция протекшего времени, дает уравнение $x = ft$, которое, разложенное как $f(t + \vartheta)$, дает $ft + \vartheta f't + \frac{\vartheta^2}{2} f''t +$ и т. д. Следовательно, пространство, пройденное в данное время, изображается формулой $\vartheta f't + \frac{\vartheta^2}{2} f''t + \frac{\vartheta^3}{2 \cdot 3} f'''t +$ и т. д. *Следовательно*, говорят нам (т. е. ввиду того, что аналитическое разложение в ряд дает много и притом бесконечно много членов), движение, посредством которого проходят это пространство, *составлено* из различных частичных движений, пространства которых, соответствующие времени, суть $\vartheta f't$, $\frac{\vartheta^2}{2} f''t$, $\frac{\vartheta^3}{2 \cdot 3} f'''t$ и т. д. Первое частичное движение есть в известном нам движении формально равномерное движение со скоростью, определенной через $f't$, второе — равномерно ускоренное, вызванное силой ускорения, пропорциональной $f''t$. «А так как прочие члены *не относятся ни к какому простому известному движению, то нет надобности принимать* их в отдельности *во внимание*, и мы покажем, что *от них можно абстрагироваться* при определении движения в начале момента времени». Это и показывается, но, конечно, только путем *сравнения* указанного выше ряда, члены которого *все* должны были служить для определения *величины* пространства, пройденного в данное время, с данным в § 3 для падения тел уравнением $x = at + bt^2$, в котором имеются только эти два члена. Но уравнение приняло эту форму благодаря тому, что предположено *объяснение, даваемое* членам, возникающим *посредством аналитического разложения в ряд;* это предположение заключается в том, что равномерно ускоренное движение *составлено* из формально равномерного движения, совершающегося с достигнутой в предыдущую часть времени скоростью и некоторого приращения (a [в уравнении] $s = at^2$, т. е. эмпирического коэф-

ошибочным не потому, что в нем не принимаются во внимание члены ряда лишь как *части некоторой суммы,* а потому, что не принимается во внимание *член, содержащий качественное определение,* которое здесь важнее всего.

В этом примере качественный *смысл* есть то, от чего ставится в зависимость способ действия. В связи с этим мы можем тотчас же привести общее утверждение, что все затруднение с принципом было бы устранено, если бы вместо формализма, исходя из которого определение *дифференциала* усматривают лишь в задаче, дающей ему это *имя,* [т. е.] в *отличии* вообще функции от ее *изменения* после того, как ее переменная величина получила некоторое *приращение,* — если бы вместо этого формализма было указано *качественное* значение принципа и действие было поставлено в зависимость от этого качественного значения. В этом смысле дифференциал от x^n полностью исчерпан первым членом ряда, получающегося путем разложения $(x+dx)^n$. Таким образом, остальные члены не принимаются во внимание не из-за их относительной малости; здесь не предполагается никакой такой неточности, погрешности или ошибки, которая бы *исправлялась* и *устранялась* другой ошибкой, — взгляд, исходя главным образом из которого Карно обосновывает правомерность обычного метода исчисления бесконечно малых. Так как дело идет *не* о *сумме,* а об *отношении,* то дифференциал полностью находят *посредством первого члена;* там же, где есть нужда в новых членах, в дифференциалах высших разрядов, их нахождение (Bestimmung) состоит не в продолжении ряда как *суммы,* а в *повторении* одного и того же *отношения,* единственно которое имеют в виду и которое, стало быть, полностью имеется уже в *первом члене.* Потребность в *форме* некоторого *ряда,* в суммировании этого ряда и все, что́ связано с этим, должны в таком случае быть совершенно отделены от указанного *интереса отношения.*

Разъяснения, даваемые Карно относительно метода бесконечных величин, — это наиболее ясное и четкое

фициента), приписываемого силе тяжести, — различию, которое вовсе не имеет существования или основания в природе вещей, а есть лишь ошибочно составленное в духе физики выражение того, что́ получается, когда пользуются общепринятым аналитическим способом рассмотрения.

изложение того, что́ нам встретилось в указанных выше представлениях. Но при переходе к самим действиям у него в той или иной мере появляются обычные представления о бесконечной *малости* опускаемых членов *по сравнению* с другими. Он оправдывает метод не столько самой природой вещей, сколько тем фактом, что *результаты* оказываются правильными, и *полезностью* введения *неполных* уравнений, как он их называет (т. е. таких, в которых осуществляют такое арифметически неправильное отбрасывание), для упрощения и сокращения исчисления.

Лагранж, как известно, вновь принял первоначальный метод Ньютона, метод рядов, чтобы избавиться от трудностей, связанных с представлением о бесконечно малом, равно как и с методом первых и последних отношений и пределов. Относительно его исчисления функций, прочие преимущества которого в отношении точности, абстрактности и всеобщности достаточно известны, мы должны отметить — поскольку это касается нашей темы — лишь то, что оно исходит из основного положения, что разность, не превращаясь в нуль, *может быть принята столь малой, что каждый член ряда превосходит по величине сумму всех следующих за ним членов.* — При этом методе также начинают с категорий *приращения* и *разности* функции, переменная величина которой получает *приращение,* что́ и вызывает появление докучливого ряда; равно как в дальнейшем члены ряда, которые должны быть опущены, принимаются в соображение, лишь поскольку они составляют некоторую *сумму,* и основание, почему они отбрасываются, усматривается в относительности их *определенного количества.* Отбрасывание, следовательно, и здесь не сводится вообще к точке зрения, встречающейся, с одной стороны, в отдельных видах применения, в которых, как мы упомянули раньше, члены ряда должны иметь определенное *качественное значение* и часть из них оставляется без внимания не потому, что они незначительны по величине, а потому, что они незначительны по качеству; с другой же стороны, отбрасывание зависит от той существенной точки зрения, которая определенно выступает у Лагранжа относительно так называемых дифференциальных коэффициентов лишь в так называемом *применении* дифференциального исчисления, что́ мы подробнее разъясним в следующем примечании.

Качественный характер вообще, свойственный (как мы здесь доказали относительно обсуждаемой нами формы величины) тому, что́ при этом называется бесконечно малым, обнаруживается непосредственнее всего в категории *предела отношения*, которая приведена выше и проведение которой в дифференциальном исчислении было названо особого рода методом. Из рассуждений Лагранжа об этом методе, что ему недостает легкости в применении и что термин *предел* не вызывает определенной идеи, мы остановимся на втором и рассмотрим более подробно его аналитическое значение. Именно в представлении о пределе и содержится указанная выше истинная категория *качественного* определения отношения между переменными величинами; ибо формы их, которые появляются, dx и dy, должны быть взяты здесь просто лишь как моменты $\frac{dy}{dx}$ и само $\frac{dx}{dy}$ следует рассматривать как единый неделимый знак. Что для механизма исчисления, особенно в его применении, утрачивается преимущество, которое он извлекает из того обстоятельства, что члены дифференциального коэффициента обособляются друг от друга, — это следует здесь оставить без внимания. Этот предел должен быть теперь *пределом* данной функции; он должен указать некоторое значение в связи с ней, определяемое способом выведения. Но с одной лишь категорией предела мы не подвинулись бы дальше, чем с тем, о чем дело шло в этом примечании, имеющем целью показать, что бесконечно малое, встречающееся в дифференциальном исчислении как dx и dy, имеет не только отрицательный, никчемный смысл некоторой *не*конечной, *не*данной величины, как это имеет место, [например], когда говорят: «бесконечное множество», «и т. д. до бесконечности» и т. п., а определенный смысл качественной определенности количественного, момента отношения, как такового. Однако эта категория, взятая в таком смысле, еще не имеет отношения к данной функции, еще не влияет сама по себе на рассмотрение этой функции и не приводит к такому пользованию указанным определением, которое должно было бы иметь место в последней; таким образом, и представление о пределе, ограниченное такой доказанной относительно него определенностью, также ни к чему не привело бы. Но термин *предел* уже сам по себе подразумевает, что это предел *чего-то*, т. е. выражает некоторое значение, заключающееся в функции переменной величины; и мы должны посмотреть, каково это конкретное оперирование им.

Он должен быть пределом *отношения* друг к другу двух *приращений*, на которые, по сделанному допущению, *увеличиваются* две переменные величины, соединенные в одном уравнении, из которых одна рассматривается как функция другой; приращение берется здесь вообще неопределенным, и постольку бесконечно малым еще не пользуются. Но путь, которым отыскивается этот предел, приводит прежде всего к тем же непоследовательностям, которые имеются в других методах. Этот путь именно таков. Если $y = fx$, то при переходе y в $y + k$ fx должно переходить в $fx+ph+qh^2+rh^3$ и т. д. Следовательно, $k=ph+qh^2$ и т. д. и $\frac{k}{h}=p+qh+rh^2$ и т. д. Если теперь k и h исчезают, то исчезает и второй член ряда кроме p, которое и есть предел отношения этих двух приращений. Отсюда видно, что h как определенное количество полагается $=0$, но что вследствие этого $\frac{k}{h}$ в то же время еще не равно $\frac{0}{0}$, а остается некоторым отношением. И вот представление о *пределе* должно принести ту пользу, что оно устранит заключающуюся здесь непоследовательность; p должно в то же время быть не действительным отношением, которое было бы $=\frac{0}{0}$, а лишь тем определенным значением, к которому отношение может *приближаться бесконечно*, [т. е.] так, чтобы *разность* могла стать *меньше всякой данной разности*. Более определенный смысл *приближения* относительно того, что́, собственно, должно сближаться между собой, будет рассмотрен ниже. — Но что количественное различие, определяемое не только как *могущее*, но и как *долженствующее быть* меньше всякой данной величины, уже не количественное различие, это само собой ясно; это так же очевидно, как что-то вообще может быть очевидным в математике; но этим мы не пошли дальше $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$. Если же $\frac{dy}{dx}=p$, т. е. принимается за определенное количественное отношение, как это и есть на самом деле, то, наоборот, возникает трудность для предположения, что $h=0$, предположения — единственно на основании которого и получается $\frac{k}{h}=p$. Если же согласиться, что $\frac{k}{h}=0$ — и в самом деле, раз $h=0$, то само собой k также становится $=0$, ибо приращение k к y имеет место лишь при условии, что приращение составляет h, — то надо было бы спросить, чтó же такое p, которое есть совершенно определенное количественное значение. На этот вопрос сразу же само собой получается простой, ясный ответ, что оно коэффициент, и нам указывают, на основании какого выведения он возникает, — некоторым определенным образом выведенная первая производная функция первоначальной функции. Если довольствоваться этим ответом, как и в самом деле Лагранж *по существу дела* удовольствовался им, то общая часть науки дифференциального исчисления и непосредственно сама форма его, которая называется *теорией пределов,* освободилась бы от приращений, а затем и от их бесконечной или какой угодно малости, от трудности, состоящей в том, что кроме первого члена или, вернее, лишь коэффициента первого члена, все остальные члены ряда, которые неизбежно появляются благодаря введению этих приращений, вновь устраняются; но помимо этого она очистилась бы также и от всего того, чтó дальше связано с этим, от формальных категорий прежде всего бесконечного, от бесконечного приближения, а затем и от дальнейших, здесь столь же пустых категорий непрерывной величины* и всех

* Категория *непрерывной* или *текучей величины* появляется вместе с рассмотрением *внешнего* и *эмпирического* изменения величин, приведенных некоторым уравнением в такую связь, что одна есть функция другой; но так как научным предметом дифференциального исчисления служит некоторое (обычно выражаемое через дифференциальный коэффициент) *отношение*, определенность которого можно назвать также *законом*, то для этой специфической определенности простая непрерывность есть отчасти нечто чужеродное, отчасти же во всяком случае абстрактная, а здесь — пустая категория, так как ею ничего не выражено относительно закона непрерывности. — До каких формальных дефиниций при этом додумываются, показывает остроумное общее изложение моим уважаемым коллегой проф. Дирксеном [112] основных определений, которыми пользуются для выведения дифференциального исчисления, изложение, данное им в связи с крити-

еще других, которые считают нужным ввести, таких как *стремление, становление, повод к изменению.* Но в таком случае требовалось бы показать, какое еще *значение* и *ценность,* т. е. какую *связь* и какое *употребление* для дальнейших математических целей имеет p помимо того ясного определения, для теории совершенно достаточного, что оно не что иное, как полученная путем разложения бинома производная функция; об этом будет сказано во *втором примечании.* — Здесь же мы прежде всего разберем ту путаницу, которую приведенное выше столь обычное в изложениях пользование представлением о *приближении* внесло в понимание собственной, качественной определенности того отношения, о котором прежде всего шла речь.

Мы показали, что так называемые бесконечно малые разности выражают собой исчезание членов отношения как определенных количеств и что то, что́ после этого остается, есть их количественное отношение, исключительно лишь поскольку оно определено качественным образом; качественное отношение здесь утрачивается столь мало, что оно скорее есть именно то, что́ получается от превращения конечных величин в бесконечные. В этом, как мы видели, состоит вся суть дела. — Так, например, в *последнем отношении* исчезают определенные количества абсциссы и ординаты. Но члены этого отношения остаются в своем существе: один — элементом ординаты, а другой — элементом абсциссы. Так как [здесь] применяют способ представления, *бесконечно приближающий* одну ординату к другой, то ранее различенная ордината переходит в другую ординату, а ранее различенная абсцисса — в другую абсциссу; но по сути дела ни ордината не переходит в абсциссу, ни абсцисса — в ординату. Ограничиваясь этим примером переменных величин, следует сказать, что элемент ординаты необходимо брать не как *отличие одной ординаты от другой,* а скорее как отличие или *качественное* определение величины относительно *элемента абсциссы; принцип одной переменной*

кой некоторых новых сочинений по этой науке и помещенное в Jahrb. f. wissensch. Kritik, 1827, № 153 и сл. Там, на стр. 1251, дается даже такая дефиниция: «*Непрерывная величина,* континуум, есть всякая величина, которая мыслится нами находящейся в таком состоянии становления, *при котором* это становление совершается не *скачкообразно,* а *непрерывным движением вперед».* Но ведь это тавтология, повторение того, что́ есть само definitum.

величины и принцип другой находятся в отношении друг к другу. Различие, не будучи больше различием конечных величин, перестало быть многообразным внутри самого себя, оно свелось в простую интенсивность, в определенность одного качественного момента отношения сравнительно с другим.

Но эта суть дела затемняется тем обстоятельством, что то, чтó мы только что назвали элементом, например ординаты, понимается затем как *разность* или *приращение* [в том смысле], что оно будто бы лишь различие между определенным количеством одной ординаты и определенным количеством другой. *Предел,* следовательно, не имеет здесь смысла отношения; он считается лишь тем последним значением, к которому другая величина того же рода постоянно приближается таким образом, что она может сколь угодно мало отличаться от него и что последнее *отношение* есть отношение *равенства*. Таким образом, бесконечно малая разность оказывается как бы неустойчивостью отличия (das Schweben eines Unterschieds) одного определенного количества от другого, и [ее] качественная природа, сообразно которой dx есть по своему существу определение отношения не к x, а к dy, отступает в представлении на задний план. [В дифференциальном исчислении] заставляют dx^2 исчезнуть относительно dx, но еще больше исчезает dx относительно x, а это поистине означает: *dx находится в отношении лишь к dy*. При таком способе изложения для геометров важно прежде всего сделать *понятным приближение* величины к ее пределу и держаться той стороны отличия одного определенного количества от другого, с которой оно не отличие и тем не менее все еще отличие. Но помимо всего прочего приближение есть само по себе категория, ничего не говорящая и ничего не делающая понятным; уже dx оставило приближение позади себя, оно не близко и не есть нечто более близкое, и бесконечная близость сама есть лишь отрицание близости и приближения.

Стало быть, поскольку вышло так, что приращения или бесконечно малые разности рассматривались лишь со стороны определенного количества, которое в них исчезает, и лишь как его предел, их понимают как *безотносительные* моменты. Из этого вытекало бы неприемлемое представление, будто в последнем отношении допустимо приравнивать друг к другу, например, абсциссу и ординату, или же синус, косинус, тангенс, sinus versus и что угодно еще. — Может казаться, что такое представление имеет место тогда, когда дуга рассматривается как касательная; ибо и *дуга,* конечно, тоже *несоизмерима с прямой линией* и ее элемент имеет прежде всего другое *качество,* нежели элемент прямой линии. Может показаться еще более бессмысленным и недопустимым, чем смешение абсциссы, ординаты, sinus versus, косинуса и т. д., принимать quadrata rotundis, принимать часть дуги, хотя бы и бесконечно малую, за долю касательной и тем самым рассматривать ее как прямую линию. — Однако такое рассмотрение следует по существу отличать от вызывающего порицание смешения; оно имеет свое оправдание в том, что в треугольнике, имеющем своими сторонами элемент некоторой дуги и элементы ее абсциссы и ординаты, *отношение остается тем же,* как если бы элемент дуги был элементом прямой линии, касательной; *углы,* составляющие *сущностное отношение,* т. е. отношение, которое сохраняется в этих элементах, когда абстрагируются от присущих им конечных величин, суть те же. — Можно это выразить и так, что прямые линии как бесконечно малые стали кривыми линиями, и отношение между ними при их бесконечности есть отношение между кривыми. Так как прямая линия, согласно дефиниции, есть *кратчайшее* расстояние между двумя точками, то ее отличие от кривой линии основано на определении *множества,* на *меньшем* множестве различимого в этом расстоянии, чтó, стало быть, есть определение *определенного количества.* Но это определение в ней исчезает, когда мы принимаем ее за интенсивную величину, за бесконечный момент, за элемент; тем самым исчезает и ее отличие от кривой линии, основанное единственно лишь на различии определенного количества. — Следовательно, как бесконечные, прямая линия и дуга не сохраняют никакого количественного отношения друг к другу и потому, на основании принятой дефиниции, не имеют больше и никакого качественного отличия друг от друга, скорее первая переходит во вторую.

Родственным и тем не менее отличным от приравнивания разнородных определений оказывается само по себе неопределенное и совершенно безразличное утверждение, что *бесконечно малые части* одного и того же целого *равны* между собой. Однако примененное к разнородному внутри себя предмету, т. е. к предмету, который обременен сущностной неравномерностью определения величин, это утверждение приводит к содержащемуся в теореме высшей механики своеобразно превратному положению, что в *равные* и притом бесконечно малые промежутки времени проходят бесконечно малые части кривой в *равномерном* движении, причем утверждение это касается такого движения, в котором в равные *конечные,* т. е. существующие части времени, проходят *конечные,* т. е. существующие *неравные* части кривой, т. е., стало быть, касается движения, которое как существующее неравномерно и признается таковым. Это положение есть словесное выражение того, чтó должен означать собой аналитический член, получающийся в приведенном выше разложении формулы неравномерного, но, впрочем, соответствующего некоторому закону движения. Более ранние математики старались выразить результаты вновь изобретенного исчисления бесконечно малых, которое и без того всегда имело дело с конкретными предметами, в словах и положениях и изобразить их геометрически, главным образом для того, чтобы применять их для доказательства теорем по обычному способу. Члены математической формулы, на которые анализ разлагал *величину* предмета, например движения, получали, таким образом, *предметное* значение, например значение скорости, ускоряющей силы и т. п. Они должны были, согласно такому значению, доставлять правильные положения, физические законы, и сообразно их аналитической связи должны были определяться и их объективные связи и отношения, как, например, что в равномерно ускоренном движении существует особая пропорциональная временам скорость, к которой кроме того всегда присоединяется приращение, сообщаемое силой тяжести. Такие положения приводятся в новейшей, получившей аналитическую форму механике исключительно как результаты исчисления, причем она не заботится о том, имеют ли они для себя и в самом себе *реальный* смысл, т. е. такой, которому соответствует существование, не заботится и о том, чтобы это доказать. Трудность сделать понятной связь таких определений, когда их берут в явно реальном смысле, например объяснить переход от просто равномерной (schlechtgleichförmigen) скорости к равномерному ускорению, считается совершенно устраненной аналитическим рассмотрением, в котором указанная связь есть простое следствие прочного отныне авторитета действий исчисления. Нахождение законов, *выходящих за пределы опыта,* т. е. нахождение положений о существовании, не имеющих существования, единственно лишь путем вычисления, выдается за торжество науки. Но в первое, еще наивное время исчисления бесконечно малых математики всячески старались указать и разъяснить самостоятельный реальный смысл этих представленных в геометрических построениях определений и положений и применять их в таком смысле для доказательства главных положений, о которых шла речь (ср. Ньютоново доказательство основного положения его теории тяготения в Princ. mathemat. philosophiae naturalis, lib. I, sect. II, prop. I, с «Астрономией» Шуберта [113] (изд. 1-е, т. III, § 20), в которых признается, что дело обстоит не *совсем так,* т. е. что в пункте, составляющем самый нерв доказательства, дело обстоит не так, как это принимает Ньютон).

Нельзя отрицать, что в этой области многое, главным образом из-за туманного понятия бесконечно малого, было принято в качестве доказательства только на том основании, что то, чтó получалось, всегда было заранее известно, и доказательство, построенное таким образом, что получалось это заранее известное, создавало по крайней мере *видимость остова доказательства,* которую все еще предпочитали одной лишь вере или одному лишь опытному знанию. Но я не колеблясь скажу, что рассматриваю эту манеру просто как фокусничество и жонглирование доказательствами и причисляю к такого рода фокусничанию даже Ньютоновы доказательства, в особенности принадлежащие к только что приведенным, за которые превозносили Ньютона до небес и ставили его выше Кеплера, утверждая, что первый математически доказал то, чтó второй нашел *лишь опытным путем.*

Пустой остов таких доказательств был воздвигнут, чтобы доказать физические законы. Но математика вообще не в состоянии доказать определения величины в физике, поскольку эти определения суть законы, имеющие своей основой *качественную природу* моментов; математика не в состоянии это сделать по той простой причине, что она не философия, *не* исходит *из понятия,* и поэтому качественное, поскольку оно не почерпается с помощью лемм из опыта, находится вне ее сферы. Отстаивание *чести* математики, настаивание на том, что все встречающиеся в ней положения должны быть *строго доказаны,* заставляло ее часто забывать свои границы. Так, казалось противным ее достоинству просто признать *опыт* источником и единственным доказательством встречающихся в ней *опытных положений.* Позднее сознание этого стало более развитым, но до тех пор, пока сознание не уяснит себе различие между тем, что́ может быть доказано математически, и тем, что́ может быть почерпнуто лишь из другого источника, равно как и различие между тем, что́ составляет лишь член аналитического разложения, и тем, что́ представляет собой физическое существование, до тех пор научность не сможет достигнуть строгости и чистоты. — А что касается указанного остова Ньютоновых доказательств, то его без сомнения еще настигнет такой же справедливый суд, который настиг другое неосновательное искусственное построение Ньютона, опирающееся на *оптические эксперименты* и связанные с ними *умозаключения.* Прикладная математика еще полна такого рода варевом из опыта и рефлексии. Но подобно тому как уже с довольно давних пор стали *фактически* игнорировать в науке одну часть ньютоновской оптики за другой, с той, однако, непоследовательностью, что еще сохраняются, хотя и в противоречии с этим, прочие части ее, точно так же является *фактом,* что часть упомянутых мнимых доказательств уже сама собой предана забвению или заменена другими доказательствами.

Примечание 2

Цель дифференциального исчисления, вытекающая из его применения

В предшествующем примечании мы рассмотрели, с одной стороны, определенность понятия *бесконечно малого,* которым пользуются в дифференциальном исчислении, с другой — основание его введения в это исчисление. И то и другое — абстрактные и потому сами по себе также и легкие определения. Так называемое применение представляет больше трудностей, равно как и более интересную сторону; элементы этой *конкретной* стороны составят предмет настоящего примечания. — Весь метод дифференциального исчисления дан в положении, что $dx^n + nx^{n-1}dx$ или $\frac{f(x+i) - fx}{i} = P$, т. е. равняется *коэффициенту* первого члена двучлена $(x+dx)^n$ или $(x+i)^n$ [114], разложенного по степеням dx или i. Дальше нечему учиться; выведение ближайших форм, дифференциала произведения, показательной функции и т. д. получается из этой формулы механически; в короткое время, в каких-нибудь полчаса — с нахождением дифференциалов дано также и обратное: нахождение первоначальной функции на основании дифференциалов, интегрирование— можно овладеть всей теорией. Задерживает на ней дольше лишь старание усмотреть, сделать [для себя] понятным, каким образом после того, как одна *сторона* (Umstand) задачи, *нахождение этого коэффициента,* решена так легко аналитическим, т. е. совершенно арифметическим способом, посредством разложения функции переменной величины, приобретшей через приращение форму двучлена, оказывается правильной также и *другая сторона,* а именно отбрасывание всех членов возникающего ряда, кроме первого. Если бы было так, что единственно лишь этот коэффициент и нужен, то после его нахождения (Bestimmung) было бы, как мы сказали, менее чем за полчаса покончено со всем, что́ касается теории, и отбрасывание прочих членов ряда представляло бы столь мало затруднений, что скорее о них как о членах ряда (как второй, третьей и т. д. [производной] функции их определение равным образом уже закончено с определением первого члена) вовсе и не было бы речи, так как в них совершенно нет надобности.

Можно здесь предпослать замечание, что по методу дифференциального исчисления сразу видно, что он изобретен и установлен не как нечто самодовлеющее; он не только не обоснован сам по себе, как особый способ аналитического действия, но насильственность, заключающаяся в том, что прямо отбрасываются члены, получающиеся посредством разложения функции, несмотря на то, что *все* это разложение признается *полностью* относящимся к *делу* — ибо дело именно и усматривается в *отличии* разложенной функции переменной величины (после того как ей придана форма двучлена) от первоначальной функции, — скорее совершенно противоречит всем математическим принципам. И потребность в таком образе действий, и отсутствие внутреннего его оправдания сразу же указывают на то, что его источник и основание находятся где-то вне его. Это не единственный случай в науке, когда то, что́ ставится вначале как элементарное и из чего, как предполагают, должны быть выведены положения данной науки, оказывается неочевидным и имеющим свою причину и обоснование скорее в последующем. История возникновения дифференциального исчисления показывает, что оно имело свое начало главным образом *как бы в кунштюках* — в различных так называемых методах касательных; после того как образ действия был распространен и на другие предметы, он был осознан позднее и выражен в абстрактных формулах, которые теперь старались также возвысить до *принципов*.

Выше мы показали, что определенность понятия так называемых *бесконечно малых* есть *качественная* определенность таких количеств, которые прежде всего как определенные количества положены находящимися в отношении друг к другу, а затем в связи с этим присоединялось эмпирическое исследование, ставившее себе целью обнаружить эту определенность понятия в имеющихся описаниях или дефинициях бесконечно малого, которые берут его как бесконечно малую разность и тому подобное. — Мы это сделали лишь для того, чтобы достигнуть абстрактной определенности понятия, как таковой. Дальше возникает вопрос: каков переход от нее к математической форме и ее применению. Для этой цели прежде всего нужно развить дальше теоретическую сторону, определенность понятия, которая окажется в самой себе не совсем бесплодной; затем следует рассмотреть отношение ее к применению и доказать относительно их обоих, насколько это здесь уместно, что [получающиеся] общие выводы в то же время соответствуют тому, чтó принадлежит к сущности дифференциального исчисления, и тому способу, каким оно достигает своей цели.

Прежде всего следует напомнить, что мы уже объяснили мимоходом ту форму, которую имеет в области математики рассматриваемая нами теперь определенность понятия. Мы показали качественную определенность количественного сначала в количественном *отношении* вообще; но уже при разъяснении различных так называемых видов счета (см. относящееся к этому примечание) мы, забегая вперед, указали, что именно в *степеннóм отношении*, которое нам предстоит еще рассмотреть в своем месте, число через приравнение моментов его понятия, единицы и численности, положено как возвратившееся к самому себе, и тем самым оно приобретает в себе момент бесконечности, для-себя-бытия, т. е. определяется самим собой. Ясно выраженная качественная определенность величин принадлежит, таким образом (это также было упомянуто выше), по своему существу к степенным определениям, а так как специфика дифференциального исчисления заключается в том, что оно оперирует качественными формами величин, то свойственным ему математическим предметом необходимо должно быть рассмотрение форм степеней, и все задачи и их решения, ради которых применяется дифференциальное исчисление, показывают, что интерес в них состоит единственно лишь в рассмотрении степенны́х определений, как таковых.

Как ни важна эта основа и хотя она сразу же ставит на первое место нечто определенное, а не чисто формальные категории переменных, непрерывных или бесконечных величин и т. п. или только функции вообще, она все же еще слишком обща; ведь с тем же самым имеют дело и другие действия; уже возведение в степень и извлечение корня, а затем действия над показательными величинами и логарифмами, ряды, уравнения высших степеней имеют интерес и применение только к отношениям, основанным на степенях. Нет сомнения, что все они в своей совокупности составляют систему рассмотрения степеней; но ответ на вопрос, какие именно из этих отношений, в которые могут быть поставлены степенны́е определения, составляют собственный предмет и интерес дифференциального исчисления, должен быть почерпнут из него самого, т. е. из его так называемых *применений*. Последние и составляют самое суть, действительный способ действия в математическом решении того или иного круга проблем; этот способ действия существовал раньше теории или общей части, и применением оно было названо позднее лишь по отношению к созданной затем теории, которая ставила себе целью, с одной стороны, установить общий метод этого способа действия, с другой — дать ему принципы, т. е. обоснование. Какими тщетными для господствовавшего до сих пор понимания этого способа действия были старания найти принципы, которые действительно разрешили бы выступающее здесь противоречие, а не оправдывали бы или не прикрывали бы его ссылкой на незначительность того, что́ согласно математическому способу действия хотя и необходимо, но здесь должно быть отброшено, или ссылкой на сводящуюся к тому же самому возможность бесконечного или какого угодно приближения и т. п., — это мы показали в предыдущем примечании. Если бы общая основа (das Allgemeine) этого способа действия была абстрагирована из действительной части математики, именуемой дифференциальным исчислением, иначе, чем это делалось до сих пор, то эти принципы и занятие ими оказались бы столь же излишними, сколь они в самих себе оказываются чем-то неправильным и постоянно противоречивым.

Если будем доискиваться этой специфики, просто обозревая то, что́ имеется в этой части математики, то мы найдем в качестве ее предмета α) уравнения, в которых какое угодно число величин (мы можем здесь ограничиться вообще двумя) связано в одно целое определенности так, что эти величины, *во-первых,* имеют свою определенность *в эмпирических величинах* как твердых пределах, а затем в такой же связи и с последними, и между собой, как это вообще имеет место в уравнениях; но так как здесь имеется лишь одно уравнение для обеих величин (если величин более двух, то и число уравнений соответственно увеличивается, но всегда оно будет меньше числа величин), то это уравнения *неопределенные. Во-вторых,* они связаны так, что одна из сторон [уравнения], сообщающая этим величинам их определенность, заключается в том, что они (по крайней мере одна из них) даны в уравнении в *более высокой степени,* чем первая степень.

Относительно этого мы прежде всего должны сделать несколько замечаний. Во-первых, величины, взятые со стороны первого из указанных выше определений, носят всецело характер лишь таких *переменных* величин, какие встречаются в задачах *неопределенного* анализа. Их значение неопределенно, но так, что если одна получает откуда-то извне совершенно определенное значение, т. е. числовое значение, то и другая становится определенной; таким образом, одна есть *функция* другой. Поэтому категории переменных величин, функций и тому подобное, как уже сказано выше, только *формальны* для специфической определенности величин, о которой здесь идет речь, так как присущая им общность еще не содержит того специфического, что́ составляет весь интерес дифференциального исчисления и что́ нельзя объяснить из нее при помощи анализа; они сами по себе простые, незначительные, легкие определения, которые делаются трудными только тогда, когда вкладывают в них то, чего в них нет, для того чтобы иметь затем возможность вывести его из них, а именно вкладывают специфическое определение дифференциального исчисления. — Что касается, далее, так называемой *константы*, то о ней можно заметить, что она прежде всего безразличная эмпирическая величина, имеющая для переменных величин определяющее значение лишь по своему эмпирическому определенному количеству, как предел их минимума и максимума; но способ соединения констант с переменными величинами сам составляет один из моментов для природы частной функции, которую образуют эти величины. Но и наоборот, сами константы также функции. Поскольку, например, прямая линия имеет значение *параметра* параболы, это ее значение состоит в том, что она функция $\frac{y^2}{x}$; так же как в разложении двучлена вообще константа как коэффициент первого члена ряда есть сумма корней, как коэффициент второго члена — сумма их произведений по два и т. д., стало быть, эти константы суть здесь вообще функции корней. Там, где в интегральном исчислении константа определяется из данной формулы, она трактуется как ее функция. Эти коэффициенты мы рассмотрим далее и в другом определении как функции, конкретное значение которых составляет весь [их] интерес.

Но то характерное, которым рассмотрение переменных величин в дифференциальном исчислении отличается от их свойства в неопределенных задачах, мы должны видеть в том, что по крайней мере одна из этих величин или даже все они имеют степень выше первой, причем опять-таки безразлично, все ли они имеют одну и ту же высшую степень или они имеют неодинаковую степень; специфическая неопределенность, которую они здесь имеют, состоит единственно лишь в том, что они *функции* друг друга в таком *степенно́м отношении*. Благодаря этому изменение переменных величин детерминировано *качественно* и, стало быть, оно *непрерывно*, и эта непрерывность, которая сама по себе есть опять-таки лишь формальная категория некоторого *тождества* вообще, некоторой определенности, сохраняющейся в изменении, остающейся равной себе, имеет здесь свой детерминированный смысл, и притом единственно лишь в степенно́м отношении, которое не имеет своим показателем никакого определенного количества и составляет *не-количественную*, сохраняющуюся определенность отношения переменных величин. Поэтому следует возразить против формализма другого рода, что первая степень есть степень лишь в отношении к более высоким степеням; сам по себе x есть лишь какой-то неопределенный квант. Поэтому нет смысла дифференцировать *само по себе* уравнения $y=ax+b$, прямой линии, или $s=ct$, уравнение просто равномерной скорости. Если из $y=ax$ или же из $y=ax+b$ получается $a=\frac{dy}{dx}$ или из $s=ct$ получается $\frac{ds}{dt}=c$, то в такой же мере определением тангенса будет $a=\frac{y}{x}$ или определением просто равномерной скорости $\frac{s}{t}=c$. Последняя выражается через $\frac{dy}{dx}$ *в связи* с тем, что̀ выдается за разложение [в ряд] равномерно ускоренного движения. Но что в системе такого движения встречается момент простой, просто равномерной скорости, т. е. не определенной высшей степенью одного из моментов движения, — это само есть, как отмечено выше, неосновательное допущение, опирающееся единственно лишь на рутину метода. Так как метод исходит из представления о приращении, получаемом переменной величиной, то, конечно, приращение может получить и такая переменная величина, которая есть лишь функция первой степени; если же после этого, чтобы найти дифференциал, берут отличие возникшего таким образом второго уравнения от данного, то сразу же обнаруживается бесполезность действия: уравнение, как мы уже заметили, до и после этого действия остается для так называемых приращений тем же, что̀ и для самих переменных величин.

β) Сказанным определяется природа подлежащего действию уравнения и теперь необходимо показать, *какой интерес* преследует это действие. Такое рассмотрение может нам дать лишь знакомые уже результаты, какие по своей форме имеются особенно в понимании этого предмета Лагранжем; но я придал изложению совершенно элементарный характер, чтобы устранить примешавшиеся сюда чужеродные определения. — Основой для действий над уравнением указанного вида оказывается то, что степень *внутри самой себя* понимается как отношение, как *система определений отношения*. Степень, указали мы выше, есть число, поскольку его изменение *определено им же самим,* его моменты, единица и численность, тождественны, — полностью, как мы выяснили ранее, прежде всего в квадрате, более формально (что́ не составляет здесь разницы) — в более высоких степенях. Степень, ввиду того что она как *число* (хотя бы и предпочитали термин *величина* как более общее, она *в себе* всегда есть число) есть *множество* и тогда, когда она изображена как *сумма,* может прежде всего быть разложена внутри себя на любое множество чисел, которые и относительно друг друга, и относительно их суммы имеют только то определение, что они все вместе равны этой сумме. Но степень может быть также разложена на *сумму* таких различий, которые определены *формой степени.* Если степень принимается за сумму, то как сумму понимают и ее основное число, корень, и оно может быть как угодно разложено, но это разнообразие разложения есть безразличное эмпирически количественное (Quantitative). Сумма, каковой должен быть корень, сведенная к своей простой определенности, т. е. к своей истинной всеобщности, есть *двучлен;* всякое дальнейшее увеличение числа членов есть не более как *повторение* того же определения и потому нечто пустое *. Важна здесь, стало быть, только *качественная определенность* членов, которая получается посредством *возведения в степень* корня, принимаемого за сумму; эта определенность заключается единственно лишь в изменении — в возведении в степень. Эти члены суть, следовательно, всецело *функции возведения в степень и* [самой] *степени.* Такое изображение числа как *суммы множества* таких членов, которые суть функции возведения в степень, а затем интерес — найти *форму* таких функций и, далее, эту *сумму* из множества таких членов, поскольку это нахождение должно зависеть только от указанной формы, — все это составляет, как известно, особое учение

---

* Лишь формализмом той *всеобщности,* на которую необходимо притязает анализ, объясняется то, что для разложения в степенной ряд берется не двучлен $(a+b)^n$, а многочлен $(a+b+$ $+c+d\ ...)^n$, как это делают и во многих других случаях; эту форму следует считать, так сказать, кокетничанием видимостью всеобщности; *суть дела* исчерпывается двучленом; посредством его разложения в ряд мы находим *закон,* а истинная всеобщность и есть закон, а не внешнее, лишь пустое повторение закона, единственно которое это $a+b+c+d...$ и порождает.

о *рядах.* Но при этом нам важно выделить еще другой интерес, а именно *отношение самой лежащей в основе величины* (определенность которой, поскольку она некоторый комплекс, т. е. в данном случае уравнение, *заключает в себе* некоторую степень) *к функциям ее возведения в степень.* Это отношение, совершенно абстрагированное от названного выше интереса [нахождения] *суммы,* окажется вытекающей из действительной науки позицией (Gesichtspunkt) как единственной, имеющейся в виду дифференциальным исчислением.

Однако сначала нужно прибавить к сказанному еще одно определение или, вернее, устранить из сказанного одно заключающееся в нем определение. А именно, мы сказали, что переменная величина, в определение которой входит степень, рассматривается *внутри ее самой* как сумма и притом как система членов, поскольку последние суть функции возведения в степень, почему и корень рассматривается как сумма, а в своей просто определенной форме — как двучлен; $x^n=(y+z)^n=(y+ny^{n-1}z+\ldots)$. Для разложения степени в ряд, т. е. для получения функций возведения в степень, эта формула исходила из *суммы,* как таковой; но здесь *дело не идет* ни *о сумме,* как таковой, ни о происходящем из нее *ряде,* а от суммы дóлжно брать только *соотношение. Соотношение* величин, как таковое, есть то, чтó, с одной стороны, остается после абстрагирования от plus некоторой суммы, как таковой, и чтó, с другой стороны, требуется для нахождения функций, получающихся в результате разложения в степеннóй ряд. Но такое соотношение уже определено тем, что здесь предмет есть уравнение, что $y^m=ax^n$ также есть уже *комплекс* нескольких (переменных) величин, содержащий их степеннóе определение. В этом комплексе каждая из этих величин всецело положена как находящаяся в *соотношении* с другой со значением, можно было бы сказать, некоторого plus в ней самой — положена как функция прочих величин; их свойство быть функциями друг друга сообщает им это определение plus, но именно этим — определение совершенно *неопределенного* plus, а не приращения, инкремента и т. п. Мы, однако, могли бы также оставить без внимания этот абстрактный исходный пункт; можно совершенно просто ограничиться тем, что после того как переменные величины даны в уравнении как функции друг друга, так что эта определенность заключает в себе отношение степеней, теперь сравниваются между собой также и функции *возведения в степень* каждой из них, — каковые вторые функции определены не чем иным, как самим возведением в степень. Можно *сначала* выдавать за *желание* или *возможность* сведéние степеннóго уравнения переменных величин к отношению функций, получающихся в результате их разложения в ряд; лишь дальнейшая *цель*, польза, применение должны указать *пригодность* такого его преобразования; эта перестановка и вызвана единственно лишь ее полезностью. Если выше мы исходили из изображения этих степенны́х определений на примере такой величины, которая *как сумма* принимается за *различенную внутри себя*, то это, с одной стороны, служило лишь для того, чтобы указать, какого вида эти функции, с другой — в этом заключается способ их нахождения.

Мы имеем перед собой, таким образом, обычное аналитическое разложение в ряд, понимаемое для целей дифференциального исчисления так, что переменной величине дается приращение dx, i, а затем степень двучлена разлагается в соответствующий ряд. Но так называемое приращение должно быть не определенным количеством, а лишь *формой*, все значение которой сводится к тому, чтобы быть *вспомогательным* средством разложения в ряд. Стремятся же в этом случае — по признанию, определеннее всего выраженному Эйлером и Лагранжем и подразумеваемому в ранее упомянутом представлении о пределе, — лишь к получающимся при этом степенны́м определениям переменных величин, к так называемым *коэффициентам* (эти коэффициенты суть, правда, коэффициенты приращения и его степеней, которые определяют последовательность ряда и к которым относятся различенные коэффициенты). При этом можно отметить, что так как приращение, не имеющее определенного количества, принимается лишь для целей разложения в ряд, то было бы всего уместнее обозначить его цифрой 1 (единицей), потому что приращение всегда встречается в разложении только как множитель, а множитель «единица» как раз и достигает той цели, чтобы приращение не приводило к какой-либо количественной определенности и к какому-либо количественному изменению. dx же, обремененное ложным представлением о некоторой количественной разности, и другие знаки, как, например, i, обремененные бесполезной здесь видимостью всеобщности, всегда выглядят как *определенное количество* и *его степени* и притязают на то, чтобы быть таковыми; это притязание приводит к стремлению, несмотря на это, *избавиться* от них, *отбросить* их. Для сохранения формы ряда, развернутого по степеням, можно было бы с таким же успехом присоединять обозначения показателей как indices к единице. Но и помимо этого необходимо абстрагироваться от ряда и от определения коэффициентов по месту, которое они занимают в ряде: отношение между всеми ими одно и то же; вторая функция — производная от первой, точно так же как первая — от первоначальной, и для той, которая по счету вторая, первая производная функция есть в свою очередь первоначальная. По существу же своему интерес составляет не ряд, а единственно лишь получающееся в результате разложения в ряд степенно́е определение в своем отношении к *непосредственной для него* величине. Стало быть, вместо того чтобы считать это определение *коэффициентом первого* члена разложения, было бы предпочтительнее (так как каждый член обозначается как *первый* относительно следующих за ним членов ряда, а такая степень в качестве степени приращения, как и сам ряд, не относится сюда) употреблять простое выражение «производная степенна́я функция», или, как мы сказали выше, «функция возведения величины в степень», причем предполагается, что известно, каким образом производная берется как заключенная *внутри* некоторой степени разложения.

Но если в этой части анализа собственно математическое начало есть не что иное, как нахождение функции, определенной через разложение в степенной ряд, то возникает еще один вопрос: что́ делать с полученным таким образом отношением, каково *применение* его и *пользование* им, или [вопрос]: действительно, для какой *цели* ищут такие функции? Дифференциальное исчисление вызвало к себе большой интерес именно тем, что оно находило такие отношения *в конкретных предметах,* сводимых к этим абстрактным аналитическим отношениям.

Но относительно применимости из самой природы вещей в силу вскрытого выше характера моментов степени само собой вытекает прежде всего следующее, еще до того, как будет сделан вывод из случаев применения. Разложение в ряд степенны́х величин, посредством которого получаются функции их возведения в степень, если абстрагироваться от более точного определения, отличается прежде всего вообще тем, что величина *понижается* на одну степень. Такое действие, следовательно, находит применение в таких *предметах,* в которых также имеется такое различие степенны́х определений. Если будем иметь в виду *пространственную определенность,* то найдем, что она содержит те три измерения, которые мы, чтобы отличить их от абстрактных различий высоты, длины и ширины, мо́жем обозначить как *конкретные* измерения, а именно линию, поверхность и целокупное пространство; а поскольку они берутся в их простейших формах и в соотношении с самоопределением и, стало быть, с аналитическими измерениями, то мы получаем прямую линию, плоскостную поверхность (и ее же как квадрат) и куб. Прямая линия имеет эмпирическое определенное количество, но с плоскостью появляется то, что́ обладает качеством, степенно́е определение; более детальные видоизменения, например то, что это происходит уже и с плоскими кривыми, мы можем оставить без рассмотрения, поскольку здесь дело идет прежде всего о различии лишь в общем виде. Тем самым возникает также *потребность переходить от более высокого степенно́го определения к низшему и наоборот,* поскольку, например, линейные определения должны быть производными от данных уравнений поверхности и т. п. или наоборот. — Далее, *движение,* в каковом до́лжно рассматривать количественное отношение пройденного пространства и соответствующего протекшего времени, обнаруживается в различных определениях просто равномерного, равномерно ускоренного, попеременно равномерно ускоренного и равномерно замедленного — возвращающегося в себя движения; так как эти различенные виды движения выражены через количественные отношения их моментов, пространства и времени, то для них получаются уравнения с различными степенны́ми определениями, а поскольку может явиться потребность определить некоторый вид движения или же пространственные величины, с которыми связан данный вид [движения], посредством другого вида движения, это действие равным образом приводит к переходу от одной степенно́й функции к другой, высшей или низшей. — Этих двух примеров достаточно для той цели, для которой они приведены.

Видимость случайности, представляемая дифференциальным исчислением в разном его применении, упростилась бы уже пониманием природы сфер применения и специфической потребности и условия этого применения. Но в самих этих сферах важно далее знать, между какими *частями* предметов математической задачи имеет место такое отношение, которое специфически полагается дифференциальным исчислением. Пока что мы сразу должны заметить, что при этом нужно принимать во внимание двоякого рода отношения. Действие понижения степени *уравнения,* рассматриваемое со стороны производных функций его переменных величин, дает результат, который *в самом себе* поистине есть уже не уравнение, а *отношение.* Это отношение составляет предмет *собственно дифференциального исчисления.* Но именно поэтому, во-вторых, здесь имеется также отношение самого́ более высокого степенно́го определения (первоначального уравнения) к низшему (производной функции). Это второе отношение мы должны оставить пока без внимания; впоследствии оно окажется предметом, характерным для *интегрального исчисления.*

Рассмотрим сначала первое отношение и для определения момента, в котором заключается интерес действия (это определение должно быть заимствовано из сферы так называемого применения), возьмем простейший пример кривых, определяемых уравнением второй степени. Как известно, отношение координат в степенно́м определении дано *непосредственно* уравнением. Следствиями основного определения являются определения других связанных с координатами прямых линий: касательной, подкасательной, нормали и т. п. Но уравнения между этими линиями и координатами суть *линейные* уравнения; те целые, в качестве частей которых определены указанные линии, — это прямоугольные треугольники, составленные *прямыми* линиями. Переход от основного уравнения, содержащего степенно́е определение, к этим линейным уравнениям содержит указанный выше переход от первоначальной функции, т. е. от той функции, которая есть *уравнение,* к производной функции, которая есть *отношение* и притом отношение между теми или иными содержащимися в кривой линиями. Связь между *отношением* этих линий и *уравнением* кривой и есть то, что́ требуется найти.

Небезынтересно отметить относительно истории [дифференциального исчисления], что первые открыватели умели указать найденное ими решение лишь всецело эмпирически, не будучи в состоянии объяснить само действие, оставшееся совершенно внешним. Я ограничиваюсь здесь указанием на Барроу, учителя Ньютона. В своих Lect. opt. et geom., в которых он решает задачи высшей геометрии по методу неделимых, отличающемуся прежде всего от того, что́ составляет особенность дифференциального исчисления, он излагает также свой метод определения касательных, «так как на этом настаивали его друзья» (lect. X). Нужно прочесть у него самого, как он решает эту задачу, чтобы составить надлежащее представление о том, каким образом этот метод дан как совершенно *внешнее правило* — в том же стиле, как в учебниках арифметики прежде излагалось тройное правило или, еще лучше, так называемая проба арифметических действий девяткой. Он чертит те маленькие линии, которые впоследствии были названы [бесконечно малыми] *приращениями* в *характеристическом треугольнике* кривой, и затем в виде простого *правила* предписывает *отбросить* как *излишние* те члены, которые в ходе развертывания уравнения выступают как степени указанных приращений или как произведения (etenim isti termini *nihilum* valebunt) [115], а также следует отбросить те члены, которые содержат величины, определяемые лишь на основе первоначального уравнения (последующее вычитание первоначального уравнения из уравнения, составленного вместе с приращениями), и, наконец, заменить *приращение ординаты самой ординатой и приращение абсциссы* — *подкасательной*. Нельзя, если позволительно так выразиться, изложить способ более школьно-педантически; последняя подстановка — это *допущение пропорциональности* приращений ординаты и абсциссы ординате и подкасательной, сделанное в обычном дифференциальном методе основой определения касательной; в правиле Барроу это допущение выступает во всей своей наивной наготе. Был найден простой способ определения подкасательной; приемы Роберваля [116] и Ферма сводятся к чему-то сходному — метод нахождения наибольших и наименьших значений, из которого исходил Ферма, покоится на тех же основаниях и на том же образе действия. Математической страстью того времени было *находить* так называемые *методы*, т. е. указанного рода правила, и притом делать из них секрет, чтó было не только легко, но в некотором отношении даже нужно, и нужно по той же причине, почему это было легко, а именно потому, что изобретатели нашли лишь эмпирически внешнее правило, а не метод, т. е. не то, чтó выведено из признанных принципов. Подобные так называемые методы Лейбниц воспринял от своего времени; Ньютон также воспринял их от своего времени, а непосредственно — от своего учителя; обобщением их формы и их применимости они проложили новые пути в науках, но, занимаясь этим, они чувствовали также потребность освободить образ действия от формы чисто внешних правил и старались дать ему надлежащее обоснование.

Анализируя метод более подробно, мы увидим, что истинный ход действия в нем таков. *Во-первых*, степенные определения (разумеется, переменных величин), содержащиеся в уравнении, низводятся до их первых функций. Но этим *меняется значение* членов уравнения. Поэтому уже нет уравнения, а возникло лишь *отношение* между первой функцией одной переменной величины и первой функцией другой. Вместо $px = y^2$ мы имеем $p : 2y$ или вместо $2ax - x^2 = y^2$ имеем $a - x : y$, чтó впоследствии стали обычно обозначать как отношение $\frac{dy}{dx}$ Уравнение есть уравнение кривой, а это отношение, целиком зависящее от него и производное (выше — согласно одному лишь *правилу*) от него, есть, напротив, линейное отношение, которому пропорциональны определенные линии; $p : 2y$ или $a - x : y$ сами суть отношения прямых линий кривой, а именно отношения координат и параметра; но *этим мы еще ничего не узнали*. Мы хотим знать о *других* встречающихся в кривой линиях, что *им присуще указанное отношение*, хотим найти равенство двух отношений. — Следовательно, вопрос, *во-вторых*, состоит в том, какие прямые линии, определяемые природой кривой, находятся в таком отношении? — Но это то, чтó *уже ранее* было *известно*, а именно, что такое полученное указанным путем отношение есть отношение ординаты к подкасательной. Древние нашли это остроумным геометрическим способом; изобретатели же нового времени открыли лишь эмпирический способ, как придать уравнению кривой такой вид, чтобы получилось то первое отношение, о котором *уже было известно*, что оно равно отношению, содержащему ту линию (здесь — подкасательную), которая подлежит определению. Отчасти это придание уравнению желаемого вида было задумано и проведено методически — дифференцирование, — отчасти же были изобретены воображаемые приращения координат и воображаемый, образованный из этих приращений и такого же приращения касательной характеристический треугольник, дабы пропорциональность отношения, найденного путем понижения степени уравнения, вместе с отношением ординаты и подкасательной была представлена не как нечто эмпирически взятое лишь из давно знакомого, а как нечто доказанное. Однако это давно знакомое оказывается вообще (а наиболее очевидно в указанной выше форме правил) единственным поводом и соответственно единственным основанием для *допущения характеристического треугольника и указанной пропорциональности.*

Лагранж отбросил это подобие доказательности (Simulation) и вступил на подлинно научный путь; его методу мы обязаны тем, что усмотрели, в чем дело, так как он состоит в том, чтобы отделить друг от друга те два перехода, которые следует сделать для решения задачи, и рассматривать и доказывать каждую из этих сторон отдельно. Одна часть этого решения — при более подробном изложении хода действия мы продолжаем пользоваться как примером элементарной задачей нахождения подкасательной — теоретическая или общая часть, а именно нахождение *первой функции* из данного уравнения кривой, регулируется особо; эта часть дает некоторое *линейное отношение,* следовательно, отношение прямых линий, встречающихся в системе определения кривой. Другая часть решения состоит в нахождении тех линий в кривой, которые находятся в указанном отношении. Это теперь осуществляется прямым путем (Théorie des fonct. anal., p. II, ch. II), т. е. не прибегая к характеристическому треугольнику, а именно к бесконечно малым дугам, ординатам и абсциссам, и не давая им определений dy и $dx,$ т. е. членов указанного отношения, а также не устанавливая в то же время непосредственно значения равенства этого отношения с самими ординатой и подкасательной. Линия (равно как и точка) имеет свое определение лишь постольку, поскольку она составляет сторону некоторого треугольника, и определение точки также имеется лишь в треугольнике. Это, скажем мимоходом, основное положение аналитической геометрии, которое приводит к координатам, или, что́ то же самое, в механике к параллелограмму сил, именно поэтому совершенно не нуждающемуся в больших усилиях доказать его. — Подкасательная теперь принимается за сторону треугольника, другие стороны которого составляют ордината и соотносящаяся с ней касательная. Последняя как прямая линия имеет своим уравнением $p = aq$ (прибавление $+ b$ бесполезно для определения и делается лишь ради излюбленной всеобщности); определение *отношения* $\frac{p}{q}$ есть a, коэффициент величины q, который есть соответственная первая функция уравнения, но который должен вообще рассматриваться лишь как $a = \frac{p}{q}$, т. е., как сказано, как сущностное определение прямой линии, применяемой как касательная к данной кривой. Далее, поскольку берется первая функция уравнения кривой, она также *определение некоторой прямой линии;* далее, так как p, одна координата первой прямой линии, и y, ордината кривой, отождествляются, стало быть, точка, в которой указанная первая прямая линия, принимаемая как касательная, соприкасается с кривой, есть также начальная точка прямой линии, определяемой первой функцией кривой, то все дело в том, чтобы показать, что эта вторая прямая линия совпадает с первой, т. е. есть касательная, или, выражаясь алгебраически, показать, что так как $y = fx$ и $p = Fq$, а теперь принимается, что $y = p$, стало быть, $fx = Fq$, то и $f'x = F'q$. Что употребляемая как касательная прямая и та прямая линия, которая определена из уравнения его первой функцией, совпадают, что вторая прямая есть, следовательно, касательная, — это показывается с помощью *приращения* i абсциссы и приращения ординаты, определяемого разложением функции. Здесь, стало быть, также появляется пресловутое приращение; однако способ, каким оно вводится для только что указанной цели, и разложение функции по этому приращению следует отличать от упомянутого выше пользования приращением для нахождения дифференциального уравнения и для характеристического треугольника. Способ, каким оно применяется здесь, правомерен и необходим; он входит в круг геометрии, так как геометрическое определение касательной, как таковой, требует, чтобы между ней и кривой, с которой она имеет одну общую точку, не могло быть другой прямой линии, также проходящей через эту точку. Ибо с принятием этого определения качество касательной или не-касательной сводится к *различию по величине*, и касательной оказывается та линия, на которую единственно с точки зрения важного здесь определения приходится *бо́льшая малость*. Эта на первый взгляд лишь относительная малость не содержит в себе ничего эмпирического, т. е. ничего зависящего от определенного количества, как такового; она качественно положена природой формулы, если различие момента, от которого зависит сравниваемая величина, есть различие в степени; так как последнее сводится к i и i^2 и так как i, которое ведь в конце концов должно означать некоторое число, следует представлять затем как дробь, то i^2 *само по себе* меньше, чем i, так что само представление, что i можно приписывать *любую* величину, здесь излишне и даже неуместно. Именно поэтому доказательство большей малости не имеет ничего общего с бесконечно малым, для которого, стало быть, вообще здесь нет места.

Я хочу здесь еще сказать о *Декартовом* методе касательных, хотя бы только ради его красоты и ради ныне скорее забытой, но вполне заслуженной его славы; впрочем, он имеет отношение и к природе уравнений, о которой мы должны будем затем сделать еще одно замечание. Декарт излагает этот самостоятельный метод, в котором искомое линейное определение также находят из той же производной функции, в своей оказавшейся и в других отношениях столь плодотворной геометрии (Oeuvres compl. ed. Cousin, tom V, liv. II, p. 357 и сл.), развивая в ней учение о широкой основе природы уравнений и их геометрического построения, а тем самым об основе анализа, в столь значительной степени применяемого к геометрии вообще. Проблема получает у него форму задачи — провести прямые линии перпендикулярно к любому месту кривой, чем определяется подкасательная и т. д. Вполне понятно чувство удовлетворения, выражаемого им по поводу своего открытия, которое касалось предмета всеобщего научного интереса того времени и, будучи всецело геометрическим, столь возвышалось над упомянутыми выше методами его соперников, содержащими одни только правила: «J'ose dire que c'est ceci le problème le plus utile et le plus général, non seulement que je sache, mais même que j'aie jamais désiré de savoir en géometrie» [117]. — При решении этой задачи он исходит из аналитического уравнения прямоугольного треугольника, образуемого ординатой той точки кривой, к которой должна быть перпендикулярна искомая прямая линия, затем ею же самой, нормалью, и, в-третьих, поднормалью, т. е. той частью оси, которая отрезается ординатой и нормалью. Из известного уравнения кривой в указанное уравнение треугольника подставляется затем значение ординаты или абсциссы; таким образом получается уравнение второй степени (и Декарт показывает, каким образом и те кривые, уравнения которых содержат более высокие степени, сводятся к уравнению второй степени), в котором встречается лишь одна из переменных величин и притом в квадрате и в первой степени, — квадратное уравнение, которое сначала предстает как так называемое нечистое уравнение. Затем Декарт рассуждает таким образом, что если мы представим себе рассматриваемую точку кривой точкой пересечения ее и круга, то этот круг пересечет кривую еще в другой точке и тогда получится для двух возникающих благодаря этому и неодинаковых x два уравнения с одинаковыми константами и одинаковой формы или же одно уравнение с неодинаковыми значениями x. Но уравнение делается *одним* уравнением лишь для *одного* треугольника, в котором гипотенуза перпендикулярна к кривой, т. е. оказывается нормалью, что́ представляют себе таким образом, будто обе точки пересечения кривой совпадают с кругом и, следовательно, круг соприкасается с кривой. Но тем самым устраняется также и *неравенство корней* x или y квадратного уравнения. В квадратном же уравнении с двумя одинаковыми корнями коэффициент члена, содержащего неизвестные в первой степени, вдвое больше *одного* лишь корня; это дает нам уравнение, посредством которого мы находим искомые определения. Этот способ следует признать гениальным приемом истинно аналитического ума — приемом, с которым не может сравниться принимаемая всецело ассерторически пропорциональность подкасательной и ординаты якобы бесконечно малым так называемым приращениям абсциссы и ординаты.

Полученное этим путем конечное уравнение, в котором коэффициент второго члена квадратного уравнения равен удвоенному корню или неизвестному, есть то же уравнение, которое находят посредством приема, применяемого дифференциальным исчислением. Уравнение $x^2—ax—b=0$ после его дифференцирования дает новое уравнение $2x - a = 0$, а дифференцирование $x^3 - px - q = 0$ дает $3\ x^2 - p = 0$. Но здесь напрашивается замечание, что отнюдь не само собой разумеется, что подобное производное уравнение также и правильно. При уравнении с двумя переменными величинами, которые оттого, что они переменные, не теряют характера неизвестных величин, получается, как мы видели выше, лишь некоторое *отношение*, по той указанной простой причине, что подстановка функций возведения в степень вместо самих степеней изменяет значение обоих членов уравнения, и само по себе еще неизвестно, имеет ли еще место между ними уравнение при таких измененных значениях. Уравнение $\frac{dy}{dx} = P$ выражает лишь то, что P есть *отношение*, и не надо приписывать $\frac{dy}{dx}$ никакого другого реального смысла. Но об этом отношении $=P$ также еще неизвестно, какому другому отношению оно равно; лишь такое уравнение, *пропорциональность*, сообщает ему значение и смысл. — Так же как (что было указано выше) значение, именуемое применением, берется извне, эмпирически, так и в тех выведенных путем дифференцирования уравнениях, о которых идет речь, для того чтобы знать, верны ли еще полученные уравнения, должно быть известно из какого-то другого источника, имеют ли они одинаковые корни. Но на это обстоятельство в учебниках не дается определенных и ясных указаний; оно устраняется тем, что уравнение с одним неизвестным $[x]$, приведенное к нулю, тотчас же приравнивается к y, благодаря чему при дифференцировании получается, конечно, $\frac{dy}{dx}$ одно лишь отношение. Исчисление функций, конечно, должно иметь дело с функциями возведения в степень, а дифференциальное исчисление — с дифференциалами, но из этого само по себе вовсе еще не следует, что величины, дифференциалы или функции возведения в степень которых мы берем, сами также должны быть *лишь* функциями *других* величин. И кроме того, в теоретической части, там, где указывается, как должны быть выведены дифференциалы, т. е. функции возведения в степень, еще нет и мысли о том, что величины, оперировать с которыми, согласно такому способу их выведения, она учит, сами должны быть функциями других величин.

Относительно отбрасывания констант при дифференцировании можно еще *отметить*, что это отбрасывание имеет здесь тот смысл, что константа безразлична для определения корней в случае их равенства, каковое определение исчерпывается коэффициентом второго члена уравнения. Так, в приведенном Декартом примере константа есть квадрат самих корней, следовательно, корень может быть определен как из константы, так и из коэффициентов, поскольку вообще константа, как и коэффициенты, есть функция корней уравнения. В обычном изложении устранение так называемых констант (связанных с прочими членами лишь посредством знаков + и —) достигается простым механизмом способа действия, состоящего в том, что для нахождения дифференциала сложного выражения приращение приписывается лишь переменным величинам и образованное благодаря этому выражение вычитается из первоначального. Смысл констант и их отбрасывания, вопрос, в какой мере они сами функции и служат ли они функциями по этому определению или нет, не подвергается обсуждению.

В связи с отбрасыванием констант можно сделать одно замечание относительно *названий* дифференцирования и интегрирования, сходное с тем, которое мы сделали раньше относительно выражений «конечное» и «бесконечное», а именно, что в их определении содержится скорее противоположное тому, чтó обозначает это выражение. Дифференцирование означает полагание разностей; но дифференцированием, наоборот, уменьшается число измерений уравнения и в результате отбрасывания константы устраняется один из моментов определенности; как мы уже отметили, корни переменной величины приравниваются, *их разность*, следовательно, *снимается*. Напротив, при интегрировании следует снова присоединить константу; уравнение благодаря этому несомненно интегрируется, но в том смысле, что ранее снятая *разность* корней *восстанавливается*, положенное равным снова дифференцируется. — Обычный способ выражения содействует тому, что остается в тени существенная сторона дела и все сводится к подчиненной и даже чуждой сути дела точке зрения отчасти бесконечно малой разности, приращения и т. п., отчасти же одной лишь разности вообще между данной и производной функцией, не обозначая их специфического, т. е. качественного, различия.

Другая главная область, в которой пользуются дифференциальным исчислением, это *механика;* мимоходом мы уже коснулись значения различных степенных функций, получающихся при элементарных уравнениях ее предмета, *движения;* здесь я буду говорить о них непосредственно. Уравнение, а именно математическое выражение просто равномерного движения $c = \frac{s}{t}$ или $s = ct$, в котором пройденные пространства пропорциональны протекшим временам по некоторой эмпирической единице c, величине скорости, не имеет смысла дифференцировать; коэффициент c уже совершенно определен и известен, и здесь не может иметь место никакое дальнейшее разложение в степенной ряд. — Как анализируется $s = at^2$, уравнение падения тел, об этом мы уже упоминали выше; первый член анализа $\frac{ds}{dt} = 2at$ понимается и словесно, и, соответственно, реально так, что он член некоторой *суммы* (каковое представление мы уже давно отклонили), одна часть движения, и притом та часть его, которая приписывается силе инерции, т. е. просто равномерной скорости, таким образом, будто в *бесконечно малых* частях времени движение *равномерное,* а в *конечных* частях времени, т. е. в существующих на самом деле, — неравномерное. Разумеется, $fs = 2at$, и значение a и t, взятых сами по себе, известно, равно как известно и то, что тем самым положено определение скорости равномерного движения: так как $a = \frac{s}{t^2}$, то вообще $2at = \frac{2s}{t}$; но этим мы нисколько не подвинулись вперед в нашем знании; лишь ошибочное предположение, будто $2at$ есть часть движения как некоторой *суммы,* дает ложную видимость положения физики. Самый множитель, a, эмпирическая единица — некоторое определенное количество, как таковое, — приписывается тяготению; если здесь применяют категорию силы тяготения, то нужно сказать, что, наоборот, как раз целое $s = at^2$ есть действие или, лучше сказать, закон тяготения. — Также верно и выведенное из $\frac{ds}{dt} = 2at$ положение, что *если бы* прекратилось действие силы тяжести, то тело со скоростью, достигнутой им в *конце* своего падения, прошло бы во время, равное времени его падения, пространство вдвое большее пройденного. — В этом положении заключается также и сама по себе превратная метафизика: *конец* падения или *конец* той части времени, в которое падало тело, всегда сам еще есть некоторая часть времени; если бы он *не был* частью времени, то наступил бы *покой,* и, следовательно, не было бы никакой скорости; скорость может быть измерена лишь по пространству, пройденному *в* некоторую часть времени, а не в конце ее. Если же, кроме того, и в других физических областях, где вовсе нет никакого движения, как, например, в действии света (помимо того, что́ называют его распространением в пространстве) и в определениях величин у цветов, применяют дифференциальное исчисление, и первая [производная] функция некоторой квадратной функции здесь также именуется скоростью, то это следует рассматривать как еще более неуместный формализм выдумывания существования.

Движение, изображаемое уравнением $s = at^2$, говорит Лагранж, мы находим при падении тел; простейшим следующим за ним было бы движение, уравнением которого было бы $s=ct^3$, но такого рода движения не оказывается в природе; мы не знали бы, что мог бы означать собой коэффициент c. Если это верно, то, напротив, имеется движение, уравнение которого — $s^3=at^2$ — кеплеровский закон движения тел Солнечной системы. И выяснение того, что́ здесь должна означать первая производная функция $\frac{2at}{3s^2}$ и т. д., а также дальнейшая непосредственная разработка этого уравнения путем дифференцирования, открытие законов и определений указанного абсолютного движения, отправляясь от *этой исходной точки,* должно бы, конечно, представлять собой интересную задачу, в решении которой анализ явил бы себя в самом надлежащем блеске.

Само по себе взятое таким образом применение дифференциального исчисления к элементарным уравнениям движения не представляет никакого *реального* интереса; формальный же интерес проистекает из общего механизма исчисления. Но иное значение приобретает разложение движения в отношении определения его траектории; если последняя есть кривая и ее уравнение содержит более высокие степени, то требуются переходы от прямолинейных функций как функций возведения в степень к самим степеням, а так как первые должны быть выведены из первоначального уравнения движения, содержащего фактор времени, с элиминированием времени, то этот фактор должен быть также низведен к тем низшим функциям, которые получаются в результате разложения в ряд и из которых можно выводить указанные уравнения линейных определений. Эта сторона возбуждает интерес к другой части дифференциального исчисления.

Сказанное доселе имело своей целью выделить и установить простое специфическое определение дифференциального исчисления и показать это определение на некоторых элементарных примерах. Это определение, как оказалось, состоит в том, что из уравнения степенных функций находят коэффициент члена разложения, так называемую первую [производную] функцию, и что *отношение*, которое она есть, обнаруживают в моментах конкретного предмета, и посредством полученного таким образом уравнения между обоими отношениями определяются сами эти моменты. Следует немного рассмотреть и принцип *интегрального исчисления* и установить, что́ получается из его применения для специфического конкретного определения этого исчисления. Понимание последнего было нами упрощено и определено более правильно уже тем, что мы его больше не принимаем за *метод суммирования*, как его назвали в противоположность дифференцированию (в котором приращение считается сущностной составной частью), вследствие чего интегрирование представлялось находящимся в сущностной связи с формой ряда. — Задача этого исчисления — прежде всего такая же теоретическая или, скорее, формальная задача, как и задача дифференциального исчисления, но, как известно, обратная последней. Здесь исходят из функции, рассматриваемой как *производная*, как коэффициент ближайшего члена, получающегося в результате разложения в ряд некоторого, пока еще неизвестного уравнения, а из этой производной должна быть найдена первоначальная степенна́я функция; та функция, которую в естественном порядке разложения в ряд следует считать первоначальной, здесь производная, а рассматривавшаяся ранее как производная есть здесь данная или вообще начальная. Но формальная сторона этого действия представляется уже выполненной дифференциальным исчислением, так как в последнем установлены вообще переход и отношение первоначальной функции к функции, получающейся в результате разложения в ряд. Если при этом отчасти уже для того, чтобы взяться за ту функцию, из которой следует исходить, отчасти же для того, чтобы осуществить переход от нее к первоначальной функции, оказывается необходимым во многих случаях прибегнуть к *форме ряда,* то следует прежде всего твердо помнить, что эта форма, как таковая, не имеет непосредственно ничего общего с собственным принципом интегрирования.

Но другой частью задачи этого исчисления оказывается с точки зрения формальной стороны действия его *применение.* А последнее само есть *задача* узнать, какое предметное *значение* в указанном выше смысле имеет первоначальная функция, [которую мы находим по] данной функции, рассматриваемой как первая [производная] функция отдельного предмета. Могло бы казаться, что это учение, взятое само по себе, нашло свое полное применение уже в дифференциальном исчислении. Однако здесь возникает еще одно обстоятельство, осложняющее все дело. А именно, так как в этом исчислении оказывается, что благодаря первой [производной] функции уравнения кривой получилось некоторое линейное отношение, то тем самым мы также знаем, что интегрирование этого отношения дает уравнение кривой в виде отношения абсциссы и ординаты; другими словами, если бы было дано уравнение для поверхности, образуемой кривой, то дифференциальное исчисление должно было бы уже научить нас относительно значения первой [производной] функции такого уравнения, что эта функция представляет ординату как функцию абсциссы, стало быть, представляет уравнение кривой.

Но все дело здесь в том, какой из моментов определения предмета *дан* в самом уравнении; ведь лишь из данного может исходить аналитическое исследование, чтобы переходить от него к прочим определениям предмета. Дано, например, не уравнение поверхности, образуемой кривой, и не уравнение тела, возникающего посредством ее вращения, а также не уравнение некоторой дуги этой кривой, а лишь отношение абсциссы и ординаты в уравнении самой кривой. Переходы от указанных определений к самому этому уравнению нельзя уже поэтому исследовать в самом дифференциальном исчислении; нахождение таких отношений есть дело интегрального исчисления.

Далее, однако, было показано, что дифференцирование уравнения с несколькими переменными величинами дает степенной член разложения (die Entwicklungspotenz) [118] или дифференциальный коэффициент не как уравнение, а только как отношение; задача состоит затем в том, чтобы в моментах предмета указать для этого *отношения*, которое есть *производная* функция, другое, равное ему. Предмет же интегрального исчисления — само *отношение первоначальной* к *производной* функции, которая должна быть здесь данной, и задача состоит в том, чтобы указать значение искомой первоначальной функции в предмете данной первой [производной] функции или, вернее, так как это *значение*, например поверхность, образуемая кривой, или подлежащая выпрямлению кривая, представляемая в виде прямой, и т. д., уже выражено как *задача*, то требуется показать, что подобного рода определение можно найти посредством некоторой первоначальной функции, и показать, каков *момент* предмета, который *для этой цели* должен быть принят за *исходную* (производную) функцию.

Обычный метод, пользующийся представлением бесконечно малой разности, облегчает себе задачу. Для квадратуры кривых линий он принимает бесконечно малый прямоугольник, произведение ординаты на элемент (т. е. на бесконечно малую часть) абсциссы, за трапецию, имеющую одной своей стороной бесконечно малую дугу, противоположную указанной бесконечно малой части абсциссы. Произведение это интегрируется в том смысле, что интеграл дает сумму бесконечно многих трапеций, ту плоскость, которую требуется определить, а именно *конечную* величину указанного элемента плоскости. И точно так же обычный метод образует из бесконечно малой части дуги и соответствующих ей ординаты и абсциссы прямоугольный треугольник, в котором квадрат этой дуги считается равным сумме квадратов обоих других бесконечно малых, интегрирование которых и дает конечную дугу.

Этот прием опирается на то общее открытие, которое служит основой этой области анализа и которое принимает здесь форму положения, что приведенная к квадрату кривая, выпрямленная дуга и т. д. находится к известной (данной уравнением кривой) функции в *отношении так называемой первоначальной функции к производной*. Здесь дело идет о том, чтобы в случае, если какая-то часть математического предмета (например, некоторой кривой) принимается за производную функцию, узнать, какая другая его часть выражена соответствующей первоначальной функцией. Мы знаем, что если данная уравнением кривой функция *ординаты* принимается за *производную* функцию, то соответствующая ей первоначальная функция есть выражение величины образуемой кривой *поверхности*, отрезанной этой ординатой, что если *то или иное определение касательной* рассматривается как производная функция, то ее первоначальная функция выражает величину соответствующей этому определению *дуги* и т. д. Однако заботу о том, чтобы узнать и доказать, что эти отношения, отношение первоначальной функции к производной и отношение величин двух частей или двух сторон (Umstände) математического предмета, образуют пропорцию, — заботу об этом снимает с себя метод, пользующийся бесконечно малым и механически оперирующий им. Характерная для остроумия заслуга — на основании результатов, уже заранее известных из других источников, открывать, что некоторые и именно такие-то стороны математического предмета находятся в отношении первоначальной и производной функции.

Из этих двух функций производная, или, как она была определена выше, функция возведения в степень, есть здесь, в интегральном исчислении, *данная* по отношению к первоначальной функции, которая еще должна быть найдена из нее путем интегрирования. Однако первая дана не непосредственно, равно как не дано само по себе, какую часть или какое определение математического предмета до́лжно рассматривать как производную функцию, дабы, приводя ее к первоначальной функции, найти другую часть или другое определение [предмета], установить величину которого требует задача. Обычный метод, сразу же представляющий, как мы сказали, некоторые части предмета как бесконечно малые в форме производных функций, определимых из первоначально данного уравнения предмета вообще посредством дифференцирования (как, [например], для выпрямления кривой — бесконечно малые абсциссы и ординаты), принимает за таковые те части или определения, которые можно привести в такую связь с предметом задачи (в нашем примере с дугой), также представляемым как бесконечно малый, которая установлена элементарной математикой, благодаря чему, если известны упомянутые части, определяется и та часть, величину которой требуется найти; так, для выпрямления кривой приводятся в связь в виде уравнения прямоугольного треугольника указанные выше три бесконечно малых, для [ее] квадратуры приводятся в связь некоторого произведения ордината и бесконечно малая абсцисса, причем поверхность вообще принимается арифметически за произведение линий. Переход от этих так называемых элементов поверхности, дуги и т. д. к величине самих поверхностей, дуги и т. д. считается в этом случае лишь восхождением от бесконечного выражения к конечному или к *сумме* бесконечно многих элементов, из которых, согласно предположению, состоит искомая величина.

Можно поэтому сказать, не вникая в суть, что интегральное исчисление — это лишь обратная, но вообще более трудная задача дифференциального исчисления. Дело обстоит скорее так, что *реальный* интерес интегрального исчисления направлен исключительно на взаимное отношение первоначальной и производной функции в конкретных предметах.

Лагранж и в этой части исчисления не соглашался отделаться от трудности проблем легким способом, основанным на указанных выше прямых допущениях. Для разъяснения сущности дела будет полезно привести здесь также и некоторые подробности его метода на немногих примерах. Этот метод ставит себе задачей как раз особо *доказать,* что между отдельными определениями некоторого математического целого, например некоторой кривой, имеется отношение первоначальной функции к производной. Но в силу природы самого отношения, приводящего в связь в некотором математическом предмете кривые с прямыми линиями, линейные измерения и функции с поверхностно-плоскостными измерениями и их функцией и т. д., приводящего, следовательно, в связь *качественно разное,* это нельзя выполнить прямым путем, и определение, таким образом, можно понимать лишь как середину между чем-то *бо́льшим* и чем-то *меньшим.* Благодаря этому, правда, само собой вновь появляется форма *приращения* с *плюсом* и *минусом,* и бодрое «dévelopрons» [«развернем в ряд»] снова очутилось на своем месте; но мы уже говорили о том, что приращения имеют здесь лишь арифметическое значение, значение чего-то конечного. Из анализа (Entwicklung) того условия, что определимая величина больше легко определяемого предела и меньше другого предела, выводится, например, что функция ординаты есть первая производная функция к функции плоскости.

Выпрямление кривых по способу Лагранжа, который исходит при этом из архимедовского принципа, заслуживает внимания тем, что оно проливает свет на *перевод* архимедовского метода в принцип новейшего анализа, а это позволяет бросить взгляд на суть и истинный смысл действия, механически производимого другим путем. Способ действия по необходимости аналогичен только что указанному способу. Архимедовский принцип, согласно которому дуга кривой больше соответствующей ей хорды и меньше суммы двух касательных, проведенных в конечных точках дуги, поскольку эти касательные заключены между этими точками и точкой их пересечения, не дает прямого уравнения. Переводом этого архимедовского основного определения в новейшую аналитическую форму служит изобретение такого выражения, которое, взятое само по себе, есть простое основное уравнение, между тем как указанная форма лишь выставляет *требование* продвигаться в бесконечность между слишком большим и слишком малым, которые каждый раз обретают определенность, и это продвижение опять-таки приводит лишь к новому слишком большому и к новому слишком малому, однако во все более узких границах. Посредством формализма бесконечно малых сразу же получается уравнение $dz^2 = dx^2 + dy^2$. Лагранжево изложение, исходя из названной нами основы, доказывает, напротив, что величина дуги есть первоначальная функция к некоей производной функции, характерный член которой сам есть функция отношения производной функции к первоначальной функции ординаты.

Так как в способе Архимеда, так же как позднее в исследовании Кеплером стереометрических предметов, имеется представление о бесконечно малом, то на это обстоятельство очень часто ссылались как на довод в пользу применения этого представления в дифференциальном исчислении, причем не выделялись характерные и отличительные черты. Бесконечно малое означает прежде всего отрицание определенного количества, как такового, т. е. так называемого *конечного* выражения, той завершенной определенности, которой обладает определенное количество, как таковое. Точно так же в последующих знаменитых методах Валериуса[119], Кавальери и других, основывающихся на рассмотрении *отношений* геометрических предметов, основное определение — это положение о том, что *определенным количеством* как определенным количеством таких определений, которые рассматриваются прежде всего лишь как отношения, пренебрегают для этой цели, и эти определения должны быть поэтому приняты за *неимеющие величины* (Nicht-Grosses). Но этим, с одной стороны, не познано и не выделено то *утвердительное* вообще, которое находится за чисто отрицательным определением и которое выше оказалось, говоря абстрактно, *качественной* определенностью величины, состоящей, говоря более определенно, в степенно́м отношении; с другой стороны, поскольку само это отношение в свою очередь включает в себя множество более точно определенных отношений, как, например, отношение между степенью и функцией, получающейся в результате ее разложения в ряд, они должны были бы быть в свою очередь основаны на всеобщем и отрицательном определении того же бесконечно малого и выведены из него. В только что приведенном изложении Лагранжа найдено то определенное утвердительное, которое заключается в архимедовом способе изложения задачи, и тем самым приему, обремененному неограниченным выхождением, дана его настоящая граница. Величие новейшего изобретения, взятого само по себе, и его способность разрешать трудные до того времени задачи, а те задачи, которые и ранее были разрешимы, разрешать простым способом, — это величие следует усматривать единственно в открытии отношения первоначальной функции к так называемой производной функции и тех частей математического целого, которые находятся в таком отношении.

Данное нами изложение взглядов можно считать достаточным для того, чтобы подчеркнуть характерное свойство того отношения величин, которое служит предметом рассматриваемого здесь особого вида исчисления. Излагая эти взгляды, мы могли ограничиться простыми задачами и способом их решения; и не было бы ни целесообразно для определения понятия (а дело идет здесь единственно об этом определении), ни под силу автору обозреть всю сферу так называемого применения дифференциального и интегрального исчисления и индукцию, согласно которой указанный нами принцип лежит в основе этих видов исчисления, завершить посредством сведѐния всех их задач и решений последних к этому принципу. Но изложение достаточно показало, что, как каждый особый вид исчисления имеет своим предметом особую определенность или особое отношение величины и это отношение конституирует сложение, умножение, возведение в степень и извлечение корня, счет посредством логарифмов, рядов и т. д. — точно так же обстоит дело и с дифференциальным и интегральным исчислением; для присущего этому исчислению отношения наиболее подходящим названием было бы отношение степенно́й функции к функции ее разложения или возведения в степень, так как это название всего ближе к пониманию сущности дела. Но как в этом исчислении вообще применяются также действия в соответствии с другими отношениями величин, например сложение и т. д., так в нем применяются и отношения логарифмов, круга и рядов, в особенности для того, чтобы сделать более удобными выражения ради требуемых действий выведения первоначальных функций из функций, получающихся в результате разложения в ряд. Дифференциальное и интегральное исчисление имеет, правда, ближайший общий с формой ряда интерес — определить те разлагаемые функции, которые в рядах называются коэффициентами членов; но в то время, как интерес этого исчисления направлен лишь на отношение первоначальной функции к ближайшему коэффициенту ее разложения, ряд стремится представить некоторую *сумму* в виде множества членов, расположенного по степеням, снабженным этими коэффициентами. Бесконечное, имеющееся в бесконечном ряде, неопределенное выражение отрицательности определенного количества вообще, не имеет ничего общего с утвердительным определением, находящимся в бесконечном этого исчисления. Точно так же бесконечно малое как *приращение,* посредством которого разложение принимает форму ряда, есть лишь внешнее средство для такого разложения, и его так называемая бесконечность не имеет никакого другого значения, кроме значения такого средства; так как ряд на самом деле не есть тот ряд, который требуется, то он приводит к некоторой *избыточности*, вновь устранить которую стоит лишнего труда. От этого лишнего труда не свободен и метод Лагранжа, который вновь прибег главным образом к форме ряда, хотя в том, что̀ называют *применением*, благодаря этому методу проявляется подлинное отличительное свойство [высшего анализа], так как, не втискивая *в предметы* форм dx, dy и т. д., метод Лагранжа прямо указывает ту часть [этих предметов], которой присуща определенность производной функции (функции разложения), и этим обнаруживает, что форма ряда здесь вовсе не то, о чем идет речь *.

Примечание 3
Еще другие формы, связанные с качественной определенностью величины

Бесконечно малое дифференциального исчисления дано в своем утвердительном смысле как *качественная* определенность величины, а относительно нее было подробно показано, что в этом исчислении она наличествует не только как степенна̀я определенность вообще, но как

* В приведенной выше критике (Jahrb. für wissensch. Krit., II Bd. 1827, Nr. 155, 6 и сл.) имеются интересные высказывания основательного ученого специалиста г. Шпера[120], взятые из его «Neue Principien des Fluentenkalkuls». Braunschweig, 1826, касающиеся именно одного из обстоятельств, в значительной мере способствующих внесению в дифференциальное исчисление неясностей и ненаучности, и согласующиеся со сказанным нами относительно того, как обстоит вообще дело с *теорией* этого исчисления. «Чисто *арифметические исследования*, — говорится там, — которые, правда, из всех подобных больше всего имеют отношение к дифференциальному исчислению, не были отделены от собственно дифференциального исчисления, и даже принимали, как, например, Лагранж, эти исследования за *самое суть*, в то время как на последнюю смотрели лишь как на их *применения*. Эти арифметические исследования включают правила дифференцирования, выведение теоремы Тейлора[121] и т. д. и даже различные методы интегрирования. *Дело же обстоит как раз наоборот:* эти случаи *применения* суть именно то, что̀ составляет *предмет собственно* дифференциального исчисления, а все те арифметические рассуждения (Entwicklungen) и действия оно *предполагает* [известными] из анализа». — Мы показали, как у Лагранжа отделение так называемого применения от приема общей части, исходный пункт которого — ряды, служит именно для того, чтобы показать *отличительное свойство* дифференциального исчисления, взятого само по себе. Но ввиду интересного взгляда автора, что именно так называемые *применения* и составляют *предмет собственно* дифференциального исчисления, следует удивляться, ка-

особенная степенна́я определенность отношения некоторой степенно́й функции к степенно́му члену разложения. Но качественная определенность имеется еще и в другой, так сказать, более слабой форме, и эту последнюю, равно как связанное с ней применение бесконечно малых и их смысл в этом применении, следовало бы еще рассмотреть в настоящем примечании.

Исходя из предшествующего, мы должны относительно этого сперва напомнить, что различные степенны́е определения выступают здесь с *аналитической* стороны прежде всего лишь как формальные и совершенно *однородные*, означают *числовые величины*, которые, как таковые, не имеют указанного выше качественного различия между собой. Но в применении к пространственным предметам аналитическое отношение показывает себя во всей своей качественной определенности как переход от линейных к плоскостным определениям, от прямолинейных — к криволинейным определениям и т. д. Это применение, кроме того, приводит к тому, что пространственные предметы, согласно своей природе данные в форме *непрерывных* величин, постигаются как *дискретные*, — плоскость, значит, как множество линий, линия — как множество точек и т. д. Единственный интерес такого разложения состоит в определении самих точек, на которые разлагается линия, линий, на которые разлагается плоскость, и т. д., чтобы, исходя из такого определения, иметь возможность двигаться далее аналитически, т. е., собственно говоря, арифметически; эти исходные пункты суть для искомых определений величины те *элементы*, из которых следует вывести функцию и уравнение для *конкретного* — для *непрерывной* величины. Для решения задач, в которых особенно целесообразно пользоваться этим приемом, требуется в элементе в качестве *исходного* пункта нечто *само по себе определенное, в противоположность* косвенному методу, поскольку последний может, напротив, начинать лишь с *пределов*, в которых имеется то само по себе определенное, нахождение которого он ставит себе

ким образом он пускается в (приведенную там же) формальную метафизику *непрерывной* величины, *становления*, *течения* и т. д. и даже умножает этот балласт; эти определения *формальны* потому, что они не более как общие категории, не указывающие именно *специфики дела*, которое следовало познать и абстрагировать из конкретных учений, из видов применения.

целью. Результат сводится в обоих методах к одному и тому же, если только возможно найти закон идущего все дальше процесса определения, при отсутствии возможности достигнуть полного, т. е. так называемого конечного определения. Кеплеру приписывается честь, что ему впервые пришла в голову мысль прибегнуть к такому обратному способу решения и сделать исходным пунктом дискретное. Его объяснение того, как он понимает первую теорему Архимедова измерения круга, выражает это очень просто. Первая теорема Архимеда, как известно, гласит, что круг равен прямоугольному треугольнику, один катет которого равен радиусу, а другой — длине окружности. Так как Кеплер понимает эту теорему так, что *окружность* круга содержит столько же частей, сколько *точек,* т. е. бесконечно много, из которых каждую можно рассматривать как основание равнобедренного треугольника, и т. д., то он этим выражает *разложение непрерывного* в форму *дискретного.* Встречающийся здесь термин *бесконечное* еще очень далек от того определения, которое он должен иметь в дифференциальном исчислении. — Если для таких дискретных найдена некоторая определенность, функция, то в дальнейшем они должны быть соединены, должны служить главным образом элементами непрерывного. Но так как никакая сумма точек не образует линии, никакая сумма линий не образует плоскости, то точки уже *с самого начала* принимаются за *линейные,* равно как линии — за плоскостные. Однако, так как вместе с тем указанные линейные точки еще *не должны быть линиями,* чем они были бы, если бы их принимали за определенные количества, то их представляют как *бесконечно малые.* Дискретное способно лишь к *внешнему* соединению, в котором моменты сохраняют смысл дискретных «одних»; аналитический переход от последних совершается лишь к их *сумме,* он не есть в то же время геометрический переход от *точки* к *линии* и от *линии* к *плоскости* и т. д. Элементу, имеющему свое определение как точка или как линия, придается поэтому в первом случае еще и качество линейности, а во втором — еще и качество плоскости, дабы сумма как сумма малых линий оказалась линией, а как сумма малых плоскостей — плоскостью.

Потребность получить этот момент качественного перехода и для этого обратиться к *бесконечно малым* необходимо рассматривать как источник всех представлений, которые, долженствуя устранить указанную трудность, сами по себе составляют величайшую трудность. Чтобы не прибегать к этим крайним средствам, необходимо было бы иметь возможность показать, что в самом аналитическом приеме, представляющемся простым *суммированием*, на самом деле уже содержится *умножение*. Но здесь появляется новое допущение, составляющее основу в этом применении арифметических отношений к геометрическим фигурам, а именно допущение, что арифметическое умножение есть также и для геометрического определения переход к некоторому высшему измерению, что арифметическое умножение величин, представляющих собой по своим пространственным определениям *линии*, есть в то же время продуцирование *плоскостного определения* из линейного; трижды 4 линейных фута дают 12 линейных футов, но 3 линейных фута, *помноженные* на 4 линейных фута, дают 12 плоскостных футов, и притом квадратных футов, так как в обоих как дискретных величинах единица — одна и та же. *Умножение линий* на *линии* представляется сначала чем-то бессмысленным, поскольку умножение производится вообще над числами, т. е. оно такое их изменение, при котором они *совершенно однородны* с тем, во что они переходят, — с *произведением*, и изменяют лишь *величину*. Напротив, то, чтó называлось бы умножением линии, как таковой, на линию — это действие называли ductus lineae in lineam, равно как plani in planum, оно есть также ductus puncti in lineam, — есть не просто изменение величины, но изменение ее как *качественного определения пространственности*, как измерения; переход линии в плоскость следует понимать как *выход* первой *вовне себя*, равно как выход точки вовне себя есть линия, выход плоскости вовне себя — некоторое целое пространство. То же самое получается, когда представляют, что *движение* точки образует (ist) линию и т. д.; но движение подразумевает определение времени и поэтому выступает в этом представлении скорее лишь как случайное, внешнее изменение состояния; здесь же мы должны брать ту определенность понятия, которую мы сформулировали как выход вовне себя — качественное изменение — и которая арифметически есть умножение единицы (как точки и т. д.) на численность (на линию и т. д.). — К этому можно еще прибавить, что при выходе плоскости вовне себя, что́ представлялось бы умножением площади на площадь, возникает видимость различия между арифметическим и геометрическим продуцированием таким образом, что выход плоскости вовне себя как ductus plani in planum давал бы арифметически умножение второго измерения (Dimensionsbestimmung) на второе, следовательно, четырехмерное произведение, которое, однако, геометрическим определением понижается до трехмерного. Если, с одной стороны, число, имея своим принципом единицу, дает твердое определение для внешне количественного, то, с другой стороны, свойственное числу продуцирование настолько же формально; $3 \cdot 3$, взятое как числовое определение, помноженное само на себя, есть $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$; но та же величина, помноженная на себя как плоскостное определение, удерживается на $3 \cdot 3 \cdot 3$, так как пространство, представляемое как выход за свои пределы, начинающийся с точки, этой лишь абстрактной границы, имеет как *конкретную* определенность, начинающуюся с линии, свою истинную границу в третьем измерении. Упомянутое выше различие могло бы иметь действительное значение для свободного движения, в котором одна сторона, пространственная, определяется геометрически (в законе Кеплера — $s^3 : t^2$), а другая, временна́я — арифметически.

В чем состоит отличие рассматриваемого здесь качественного от предмета предыдущего примечания, теперь само собой ясно и без дальнейших объяснений. В предыдущем примечании качественное заключалось в степенно́й определенности; здесь же это качественное, равно как и бесконечно малое, дано лишь как множитель (в арифметике) относительно произведения, как точка относительно линии, линия относительно плоскости и т. д. Необходимый качественный переход от дискретного, на которое, как представляется, разложена непрерывная величина, к непрерывному осуществляется как суммирование.

Но что мнимо простое суммирование на самом деле содержит в себе умножение, следовательно, переход от линейного к плоскостному определению, это проще всего обнаруживается в том способе, каким, например, показывают, что площадь трапеции равна произведению суммы ее двух параллельных сторон на половину высоты.

Эта высота представляется лишь как *численность* некоторого множества *дискретных* величин, которые должны быть суммированы. Эти величины суть линии, лежащие параллельно между теми двумя ограничивающими [трапецию] параллельными линиями; их бесконечно много, ибо они должны составлять плоскость, но они линии, которые, следовательно, для того чтобы быть чем-то плоскостным, должны быть вместе с тем положены с отрицанием. Чтобы избежать трудности, заключающейся в том, что сумма линий должна дать [в результате] плоскость, линии сразу же принимаются за плоскости, но равным образом за *бесконечно тонкие,* ибо они имеют свое определение исключительно в линейности параллельных границ трапеции. Как параллельные и ограниченные другой парой прямолинейных сторон трапеции они могут быть представлены как члены арифметической прогрессии, разность которой остается вообще той же, но не обязательно должна быть определена, а первый и последний член которой суть указанные две параллельные линии; сумма такого ряда равна, как известно, *произведению* этих параллельных линий на половинную *численность* членов. Это последнее определенное количество называется *численностью* только лишь в сравнении с представлением о бесконечно многих линиях; оно вообще есть определенность величины чего-то *непрерывного* — высоты. Ясно, что то, что́ называется суммой, есть также ductus lineae in lineam, *умножение* линейного на линейное, согласно вышеуказанному определению — возникновение плоскостного. В простейшем случае, в прямоугольнике, каждый из множителей *ab* есть простая величина; но уже в другом, даже элементарном примере трапеции лишь один множитель есть простая величина половины высоты, другой же определяется через прогрессию; он также есть некоторое линейное, но такое линейное, определенность величины которого оказывается более запутанной; поскольку она может быть выражена лишь посредством ряда, ее аналитический, т. е. арифметический, интерес состоит в ее суммировании; геометрический же момент здесь — умножение, качественная сторона перехода от линейного измерения к плоскостному; один из множителей принимается за *дискретный* лишь в целях арифметического определения другого, а сам по себе он подобно последнему есть линейная величина.

Способ, при котором представляют плоскость как сумму линий, применяется, однако, часто и тогда, когда для достижения результата не производят умножения, как такового. Так поступают, когда важно указать величину как определенное количество не в уравнении, а в пропорции. Что площадь круга относится к площади эллипса, большая ось которого равна диаметру этого круга, как большая ось к малой, доказывается, как известно, так, что каждая из этих площадей принимается за *сумму* принадлежащих ей *ординат;* каждая ордината эллипса относится к соответствующей ординате круга, как малая ось к большой, из чего заключают, что так же относятся между собой и *суммы* ординат, т. е. *площади.* Те, кто при этом хочет избежать представления о плоскости как сумме линий, превращают с помощью обычного, совершенно излишнего вспомогательного приема ординаты в *трапеции* бесконечно малой ширины; так как [здесь] уравнение есть лишь пропорция, то [при этом] сравнивается лишь один из двух линейных элементов площади. Другой элемент площади — ось абсцисс — принимается в эллипсе и круге за равный, как множитель арифметического определения величины, следовательно, как равный 1, и поэтому пропорция оказывается всецело зависящей только от отношения одного определяющего момента. Чтобы *представить* плоскость, требуются два измерения; но *определение величины,* как оно должно быть дано в этой пропорции, касается только *одного* момента; поэтому уступка или помощь представлению тем, что к этому *одному* моменту присоединяют представление *суммы,* есть, собственно говоря, непонимание того, что́ здесь необходимо для математической определенности.

Данные здесь пояснения служат также критерием упомянутого выше метода *неделимых,* предложенного Кавальери; метод этот также оправдан этими пояснениями, и ему нет надобности прибегать к помощи бесконечно малых. Эти неделимые суть для Кавальери линии, когда он рассматривает площади, или квадраты, площади кругов, когда он рассматривает пирамиду или конус, и т. д.; основную линию или основную площадь, принимаемую за определенную, он называет *правилом.* Это константа, а по своему отношению к ряду это его первый или последний член; неделимые рассматриваются как параллельные ей, следовательно, по отношению к фигуре определяются одинаково. Общее основоположение Кавальери гласит (Exerc. geometr. VI — позднейшее сочинение Exerc. I, p. 6), что «все фигуры, и плоские, и телесные, *относятся* друг к другу, как все их неделимые, причем эти неделимые сравниваются [122] между собой совокупно, а если у них есть какая-либо общая пропорция, то в отдельности». — Для этой цели он сравнивает в фигурах, имеющих *одинаковые* основание и высоту, пропорции между линиями, проведенными параллельно основанию и *на равном расстоянии* от него; все такие линии некоторой фигуры имеют одинаковое определение и составляют всю ее площадь. Так Кавальери доказывает, например, и ту элементарную теорему, что параллелограммы, имеющие одинаковую высоту, относятся между собой, как их основания; каждые две линии, проведенные в обеих фигурах на одинаковом расстоянии от основания и параллельные ему, относятся между собой, как основания этих фигур; следовательно, так же относятся между собой и целые фигуры. В действительности линии не составляют площади фигуры как *непрерывной,* а составляют эту площадь, поскольку она должна быть *определена* арифметически; линейное — это тот ее элемент, единственно лишь посредством которого должна быть постигнута ее определенность.

Это заставляет нас поразмыслить о различии [в мнениях] относительно того, в чем состоит *определенность* какой-нибудь фигуры, а именно эта определенность или такова, какова в данном случае *высота* фигуры, или она *внешняя граница.* Поскольку она дана как *внешняя граница,* допускают, что *непрерывность* фигуры, так сказать, *следует* равенству или отношению границы; например, равенство *совпадающих* фигур основывается на совпадении ограничивающих их линий. Но в параллелограммах с одинаковой высотой и основанием лишь последняя определенность есть внешняя граница. Высота, а не вообще *параллельность,* на которой основано *второе главное определение* фигур, их *отношение,* прибавляет к внешней границе второй принцип определения. Эвклидово доказательство равенства параллелограммов, имеющих одинаковую высоту и основание, приводит их к треугольникам, к *внешне ограниченным* непрерывным; в доказательстве же Кавальери, и прежде всего в доказательстве пропорциональности параллелограммов, граница есть вообще *определенность величины, как таковая,* обнаруживающаяся в любой паре линий, проведенных в обеих фигурах на одинаковом расстоянии. Эти равные или находящиеся в равном отношении к основанию линии, взятые *совокупно,* дают находящиеся в равном отношении фигуры. Представление об *агрегате* линий противоречит непрерывности фигуры; но рассмотрение линий полностью исчерпывает ту определенность, о которой идет речь. Кавальери часто отвечает на то возражение, будто представление о неделимых приводит к тому, что должны быть сравнимы между собой бесконечные по *численности* линии или поверхности (Geom., lib. II, prop. I, schol.); он проводит правильное различие, говоря, что он сравнивает между собой не их *численность,* которую мы не знаем, правильнее сказать, не их численность, которая, как мы отметили выше, есть пустое вспомогательное представление, а лишь *величину,* т. е. количественную определенность, как таковую, которая равна занимаемому этими линиями пространству; так как последнее заключено в границах, то и эта его величина заключена в тех же границах; *непрерывное,* говорит он, *есть не что иное, как сами неделимые;* если бы оно было нечто находящееся *вне их,* то оно было бы несравнимо; но было бы нелепо сказать, что ограниченные непрерывные несравнимы между собой.

Как видим, Кавальери хочет провести различие между тем, чтó принадлежит к *внешнему существованию* непрерывного, и тем, в чем состоит его *определенность* и чтó единственно и следует выделять для сравнения и в целях получения теорем о нем. Категорий, которыми он пользуется при этом, говоря, что непрерывное *сложено* из неделимых или *состоит* из них и т. п., конечно, недостаточно, так как при этом прибегают также к созерцанию непрерывного или, как мы сказали выше, к его внешнему существованию; вместо того чтобы сказать, что «непрерывное есть не что иное, как сами неделимые», было бы правильнее и, стало быть, само собой ясно сказать, что определенность величины непрерывного есть не что иное, как определенность величины самих неделимых. — Кавальери не придает никакого значения сомнительному выводу, что существуют-де бóльшие и меньшие бесконечные, выводу, делаемому *схоластикой* из представления, что неделимые составляют непрерывное, и он определенно выражает далее (Geom., lib. VII, praef.) уверенность в том, что его способ доказательства вовсе не заставляет иметь представление о непрерывном как о сложенном из неделимых; *непрерывные лишь следуют пропорции неделимых.* — Кавальери говорит, что он берет агрегаты неделимых не с той стороны, с какой они кажутся подпадающими под определение бесконечности из-за *бесконечного множества* линий или плоскостей, а поскольку они имеют в самих себе *некоторый определенный характер и природу ограниченности.* Но чтобы устранить и этот камень преткновения, он в специально для этого добавленной седьмой книге не жалеет труда доказать основные теоремы своей геометрии таким способом, который остается свободным от примеси бесконечности. — Этот способ сводит доказательства к упомянутой выше обычной форме *наложения* фигур, т. е., как мы уже отметили, к представлению об определенности как о *внешней пространственной границе.*

Относительно этой формы наложения можно прежде всего сделать еще и то замечание, что она вообще есть, так сказать, ребяческая помощь чувственному созерцанию. В элементарных теоремах о треугольниках представляют их два рядом, и, поскольку в каждом из них из шести частей те или иные три принимаются равными по величине соответствующим трем частям другого треугольника, показывается, что такие треугольники совпадают между собой, т. е. что каждый из них имеет и *остальные три* части равными по величине частям другого, так как они ввиду равенства трех первых частей *совпадают друг с другом.* Формулируя это более абстрактно, можно сказать, что именно в силу равенства каждой пары соответствующих друг другу частей обоих треугольников имеется только *один треугольник;* в последнем три части принимаются за *уже определенные*, из чего следует *определенность* также и трех остальных частей. Таким образом, показывается, что в трех частях *определенность завершена;* стало быть, для определенности, как таковой, три остальные части оказываются *излишеством — излишеством чувственного существования,* т. е. созерцания непрерывности. Высказанная в такой форме качественная определенность выступает здесь в [своем] отличии от того, что́ предлежит в созерцании, от целого как некоторого непрерывного внутри себя; *совпадение* мешает осознать это различие.

Вместе с параллельными линиями и в параллелограммах появляется, как мы отметили, новое обстоятельство: отчасти равенство одних только углов, отчасти же высота фигур, от которой отличны внешние границы последних, стороны параллелограммов. При этом возникает сомнение, следует ли в этих фигурах — кроме определенности одной стороны, основания, которое дано как внешняя граница, — принимать в качестве другой определенности *другую внешнюю границу* (а именно другую сторону параллелограмма) или высоту? Если даны две такие фигуры, имеющие одинаковое основание и высоту, причем одна из них прямоугольная, а другая с очень острыми углами (и, стало быть, с очень тупыми противолежащими углами), то последняя фигура легко может показаться созерцанию большей, чем первая, поскольку созерцание берет предлежащую большую сторону ее как *определяющую* и поскольку оно по способу представления Кавальери сравнивает *площади* по тому или иному *множеству* параллельных линий, которыми они могут быть пересечены; [согласно этому способу представления], *бо́льшую* сторону [остроугольного параллелограмма] можно было бы рассматривать как возможность *большего количества* линий, чем у вертикальной стороны прямоугольника. Однако такое представление не служит возражением против метода Кавальери; ибо *множество* параллельных линий, представляемое в этих двух параллелограммах для сравнения, предполагает в то же время *одинаковость их расстояний* друг от друга или от основания, из чего следует, что *другим определяющим моментом* служит высота, а не другая сторона параллелограмма. Но далее это меняется, когда мы сравниваем между собой два параллелограмма, имеющие одинаковые основание и высоту, но лежащие не в одной плоскости и образующие с третьей плоскостью разные углы; здесь параллельные сечения, возникающие, когда представляют себе их пересеченными третьей плоскостью, движущейся параллельно себе самой, уже не одинаково удалены одно от другого, и эти две плоскости неравны между собой. Кавальери обращает особое внимание на это различие, которое он определяет как различие между transitus rectus и transitus obliquus [123] неделимых (как в Exercit. I n. XII сл., так уже в Geometr. I, II), и этим он устраняет поверхностное недоразумение, могущее возникнуть с этой стороны. Я припоминаю, что Барроу в своем упомянутом выше сочинении (Lect. geom., II, p. 21), хотя также пользуется методом неделимых, но, нарушая его чистоту, соединяет его с перешедшим от него к его ученику Ньютону и к другим современным ему математикам, в том числе и к Лейбницу, признанием возможности приравнять криволинейный треугольник, как, например, так называемый характеристический, прямолинейному, поскольку оба бесконечно, т. е. *очень* малы, — я припоминаю, что Барроу приводит подобное возражение Такэ [124], остроумного геометра того времени, также пользовавшегося новыми методами. Имеющееся у последнего сомнение касается также вопроса о том, какую линию — а именно при вычислении конических и сферических поверхностей — следует принимать за *основной момент определения* для рассуждения, основанного на применении дискретного. Такэ возражает против метода неделимых, утверждая, что при вычислении *поверхности* прямоугольного конуса по этому атомистическому методу треугольник, [получаемый при продольном рассечении] конуса, изображается составленным из прямых, параллельных основанию *линий*, перпендикулярных к оси и представляющих собой в то же время *радиусы тех кругов*, из которых состоит *поверхность* конуса. Если же эта поверхность определяется как сумма окружностей, а эта сумма определяется из численности их радиусов, т. е. из длины оси конуса, из его высоты, то получаемый результат противоречит сформулированной и доказанной еще Архимедом истине. В ответ на это возражение Барроу показывает, что для определения поверхности конуса не его ось, а *сторона* треугольника, [получаемого при продольном рассечении] конуса, должна быть принята за ту линию, вращение которой образует эту поверхность и которая, а не ось, должна поэтому считаться определенностью величины для множества окружностей.

Подобного рода возражения или сомнения имеют своим источником единственно лишь обыденное неопределенное представление, согласно которому линия состоит из *бесконечного* множества точек, плоскость — из бесконечного множества линий, и т. д.; этим представлением затушевывается сущностная определенность величины линий или плоскостей. — Целью настоящих примечаний было раскрыть те *утвердительные* определения, которые при различном применении бесконечно малых в математике остаются, так сказать, на заднем плане, и освободить их от того тумана, в который их закутывает эта считающаяся чисто отрицательной категория. В бесконечном ряде, как, например, в Архимедовом измерении круга, «бесконечность» означает только то, что закон дальнейшего определения известен, но так называемое *конечное,* т. е. арифметическое выражение, не дано, сведéние дуги к прямой линии не осуществимо; эта несоизмеримость есть их качественное различие. Качественное различие дискретного и непрерывного вообще содержит также и отрицательное определение, ввиду которого они выступают как несоизмеримые и которое влечет за собой бесконечное в том смысле, что непрерывное, долженствующее быть принятым за дискретное, по своей непрерывной определенности не должно уже иметь определенное количество. Непрерывное, которое арифметически должно быть принято за *произведение,* тем самым полагается в самом себе дискретным, а именно разлагается на те элементы, которые составляют его множители; в этих множителях заключается определенность его величины; и именно потому, что они суть эти множители или элементы, они имеют низшее измерение, а поскольку появляется степеннáя определенность, имеют более низкую степень, чем та величина, элементами или множителями которой они служат. Арифметически это различие обнаруживается как чисто количественное различие, как различие корня и степени или какой-нибудь другой степеннóй определенности. Но если это выражение имеет в виду лишь количественное, как таковое, например $a : a^2$ или $d \cdot a^2 = 2a : a^2 = 2 : a$, или для закона падения тел $t : at^2$, то оно дает лишь ничего не говорящие отношения $1 : a$, $2 : a$, $1 : at$; в противоположность своему чисто количественному определению члены отношения должны были быть удержаны врозь своим различным качественным значением, как, например, $s : at^2$, где величина выражена как некоторое качество, как функция величины некоторого другого качества. При этом сознание имеет перед собой лишь количественную определенность, над которой легко производятся подобающие действия, и можно спокойно умножать величину одной линии на величину другой; но в результате умножения этих самых величин получается также качественное изменение — переход линии в плоскость, поскольку появляется некоторое отрицательное определение; оно и вызывает ту трудность, которую можно устранить, если уразуметь особенность этого определения и простую суть дела; но введением бесконечного, от которого ожидается ее устранение, эта трудность скорее только запутывается еще больше и оставляется совершенно непреодоленной.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

КОЛИЧЕСТВЕННОЕ ОТНОШЕНИЕ

Бесконечность определенного количества была определена выше так, что она есть его отрицательное потустороннее, которое, однако, оно имеет в самом себе. Это потустороннее есть качественное вообще. Бесконечное определенное количество как единство обоих моментов — количественной и качественной определенностей — есть прежде всего *отношение*.

В отношении определенное количество уже не обладает лишь безразличной определенностью, а качественно определено как всецело соотнесенное со своим потусторонним. Оно продолжает себя, переходя в свое потустороннее; последнее есть прежде всего некоторое *другое* определенное количество вообще. Но по своему существу они не соотнесены друг с другом как внешние определенные количества, а *каждое имеет свою определенность в этом соотношении с иным*. Они, таким образом, в этом своем инобытии возвращены в себя; то, что́ каждое из них есть, оно есть в ином; иное составляет определенность каждого из них. — Смысл выхождения определенного количества за свои пределы состоит теперь, стало быть, не в том, что оно изменяется лишь в некоторое иное или в свое абстрактное иное, в свое отрицательное потустороннее, а в том, что в этом ином оно достигает своей определенности; оно находит *само себя* в своем потустороннем, которое есть некое другое определенное количество. *Качество* определенного количества, определенность его понятия — это его внешность вообще, в отношении же оно *положено* так, что оно имеет свою